

Chapter 0 Vector Analysis

1. 若 $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ，在點 $P(1, 2, 3)$ 沿著 $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{k}$ 的方向導數為何？
2. 曲面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ ，在點 $P(1, 2, 3)$ 之法向量(normal vector)為何？
3. 若 $\vec{V} = 3xz\hat{i} + 2xy\hat{j} - yz^2\hat{k}$
 - (a) 求 \vec{V} 之散度 (divergence) 為何？
 - (b) 求 \vec{V} 之旋度 (curl) 為何？

Chapter 1 Introduction

1. 流體 (fluid) 的定義為何？
2. 固體 (solid) 的定義為何？
3. 流體力學所使用的三大基本定律為何？

Chap 2. Physical Properties of Fluid

1. 何謂流體壓縮性 (fluid compressibility) ?
2. 何謂牛頓流體 (Newtonian fluid) ? 何謂理想流體 (ideal fluid) ?
3. 何謂連續體假說 (continuum hypothesis) ?
4. 何謂穩流 (steady flow) ?
何謂均勻流 (uniform flow) ?
5. 請解釋下列名詞及回答問題：
 - (a) 氣流線 (stream line)
 - (b) 軌跡線 (trajectory)
 - (c) 煙線 (streak line)
 - (d) 於何種情況下，這三種流線會重合？
6. 何謂體積力 (body force) ?
何謂表面力 (surface force) ?
7. 何謂巴斯卡定律 (Pascal's Law) ?
8. 請說明氣壓梯度力 (pressure gradient force) 的物理意義及其數學式。

9. 請說明靜力平衡 (hydrostatic balance) 的物理意義及其數學式。

10. 請寫出尤拉動量方程 (Euler's momentum equation) 及敘述各項的物理意義。

Chapter 3 Kinematics of Fluid

1. 為了描述流體的運動，吾人經常使用到的數學分析方法有 Lagrangian method 及 Eulerian method。請說明這兩種方法。
2. 流體質點於位置 (x, y, z) ，時間 t 的溫度 T 可以表示為 $T(x, y, z, t)$
 - (a) 請以數學式表示全微分 dT 與偏微分 dx, dy, dz 及 dt 的關係；
 - (b) 請說明全導數 $\frac{dT}{dt}$ 與偏導數 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 的物理量；
 - (c) 請以速度分量 u, v, w 及偏導數 $(\frac{\partial T}{\partial t})$ 來表示全導數 $(\frac{dT}{dt})$ 。
3. 假設在台灣上空存在由南到北遞減的溫度場分佈（考慮台灣南北全長 400 公里，南北溫度差異為 4°C ），今釋放一探空氣球隨風探測溫度的變化（假設無垂直方向之變化），試問：若 (1) 吹東北風，風速為 $5\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$ ，且氣球測得的溫度保守；(2) 吹東北風，風速為 $5\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$ ，且氣球測得的溫度改變量為 $0.25 \times 10^{-4}^\circ\text{C s}^{-1}$ ；(3) 吹東風，風速為 5 ms^{-1} ，且氣球測得的溫度保守；(4) 吹東風，風速為 5 ms^{-1} ，且氣球測得的溫度改變量為 $0.25 \times 10^{-4}^\circ\text{C s}^{-1}$ ，則在陽明山竹子湖測站所測得的溫度變化為何？
4. (a) 何謂系統 (system)？

(b) 何謂控制體積 (control volume) ?

(c) 何謂控制面 (control surface) ?

5. 就連續方程 (continuity equation) 而言 :

(a) 請寫出連續方程的積分式，並解釋各項的物理意義；

(b) 請寫出連續方程的微分式，並解釋各項的物理意義。

6. Consider a flow of uniform density ρ in a non-rotating frame of

reference with $\vec{g} = -g\hat{k}$. The velocity field is $u = Ax$, $v = -Ay$,

$w = 0$, where A is a constant :

(a) compute the nine components of the rate of deformation tensor ;

(b) compute the nine components of the rate of rotation tensor .

Chapter 4 Vorticity Dynamics

1. 就剛體旋轉 (solid body rotation) 而言，其旋轉的角度為

$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{k}$ ，其中 ω_0 為常數， \hat{k} 為 z 座標的單位向量。請計算此種流體的渦度 (vorticity) 及散度 (divergence)。

2. (a) 請寫出渦管強度 (vortex tube strength) 的定義；

(b) 請證明渦管強度為一固定之常數。

3. (a) 請寫出環流 (circulation) 的數學定義；

(b) 請利用 Stokes' theorem 說明環流與渦度間的關係。

4. 就自由渦旋 (free vortex) 而言， $\vec{V}_\theta = \frac{c}{r} \vec{e}_\theta$ ，其中 $c = \text{const}$

(a) 請計算其渦度 (vorticity) 為何？

(b) 請計算其環流 (circulation) 為何？

5. 就 Rankine vortex 而言，

$$\text{其 } V_\theta = \begin{cases} r\omega_0 & , r \leq R_0 \\ \frac{R_0^2\omega_0}{r} & , r \geq R_0 \end{cases} \quad (R_0 \text{ 為半徑})$$

- (a) 請求得 V_θ 與 r 之關係；

(b) 請求得渦度 (Ω) 與 r 之關係。

6. (a) 請說明 Kelvin's circulation theorem ;
- (b) 請利用 Kelvin's circulation theorem 說明為何在陸地上白天會吹海風，而晚上會吹陸風？
7. 何謂正壓流體 (barotropic flow) ?
- 何謂斜壓流體 (baroclinic flow) ?

Chap 5. The Conservation Law

1. (a) 請說明 Reynold's transport theorem，並解釋各項物理意義；
(b) 請利用 Reynold's transport theorem，導出 continuity equation；
(c) 請利用 Reynold's transport theorem，導出 Cauchy's equation of motion。
2. 請說明 Navier Stoke's equation，並解釋各項的物理意義。
3. 就穩定的 (steady)、不可壓縮的 (incompressible)、且密度均勻的 (uniform) 的流體而言，請寫出其 Bernoulli's equation，並解釋其中各項的物理意義。
4. (a) 請寫出 Mechanical Energy Equation 的微分式，並解釋其中各項的物理意義。
(b) 請寫出 Mechanical Energy Equation 的積分式，並解釋其中各項的物理意義。
5. (a) 何謂 Boussinesq approximation？
(b) 請寫出在 Boussinesq approximation 之下的連續方程 (continuity eq.)；

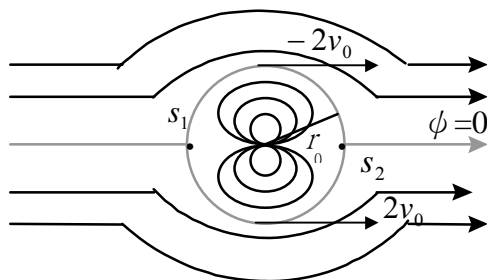
(c) 請寫出在 Boussinesq approximation 之下的 x - , y - , z 方向分量的動量方程 (momentum equation) ;

(d) 請寫出在 Boussinesq approximation 之下的熱方程 (heat equation) 。

Chapter 6 Irrotational Flow

1. 何謂無旋性流 (irrotational flow) 或位勢流 (potential flow) ?
2. 何謂不可壓縮流體 (incompressible fluid) ?
3. (a) 請證明位勢流 (potential flow) 的速度位 (velocity potential) 為一諧和函數 (harmonic function) ;
 (b) 請證明非輻散流 (non-divergence flow) 的氣流函數 (stream function) 為一諧和函數 (harmonic function) 。
4. 就二維 (x 及 y 座標)、無旋性 (irrotational)、不可壓縮 (incompressible) 流體而言，請從 (a)物理觀點、(b)數學觀點證明等 ψ 線 (streamline) 必定垂直於等 ϕ 線 (Equipotential line) 。
5. 就二維 (r 及 θ 座標) 的源流體 (source) 而言，若其速度位 (velocity potential) 為 $\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$ ，其中 q 為中心點流體的通量 ($q > 0$)，試證明其氣流函數 (stream function) 為 $\psi = \frac{q}{2\pi} \theta$ 。
6. 就二維 (r 及 θ 座標) 的自由渦旋 (free vortex) 而言，若其速度位 (velocity potential) 為 $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ ，其中 Γ 為環流強度，試證明其氣流函數 (stream function) 為 $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ 。

7. 若慮一均勻流場 (uniform flow) 和二維偶流 (2D doublet) 的組合流場 (combined flow field) 如下圖：



其中均勻流場的速度位及氣流函數分別為 $\phi = U_0 r \cos \theta$ ，

$\psi = U_0 r \sin \theta$ ，二維偶流的速度位及氣流函數為 $\phi = \frac{m \cos \theta}{2\pi r}$ ，

$\psi = -\frac{m \sin \theta}{2\pi r}$ 。試求此組合流場的

- 速度位 (velocity potential ϕ)
- 氣流函數 (stream function ψ)
- 徑向速度 (radial velocity V_r)
- 切線速度 (tangential velocity V_θ)

8. 有一二維 (two-dimensional) 、無旋性 (irrotational) 、非輻散 (non-divergent) 的流場，其邊界條件如下：

$$\text{針對 } x \begin{cases} \varphi(0, y) = 0 \\ \varphi(a, y) = 0 \end{cases} \quad \text{針對 } y \begin{cases} \varphi(x, 0) = 0 \\ \varphi(x, \infty) = \text{finite} \end{cases}$$

又此流場滿足 $\nabla^2 \varphi = 0$ ，亦即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

試求當 $0 < x < a$ ， $0 < y < \infty$ 時 $\varphi = ?$

Chapter 7 Dynamical Similarity

1. 兩個流體系統具有動力相似性 (dynamical similarity) 的條件為何？
2. 請說明 Reynold number 的定義。
3. 請說明 Froude number 的定義。
4. 請說明 Richardson number 的定義。
5. 請說明 Mach number 的定義。
6. 請說明 Prandtl number 的定義。
7. 請說明 Euler number 的定義。
8. 假設有一個流體系統，其壓力差 Δp 是長度 L 、速度 U 、角速度 Ω 、密度 ρ 和重力 g 的函數。試利用 Buckingham π -method 求出此流體系統有幾個無因次參數 (non-dimensional parameters)？請把這些無因次參數寫出來並嘗試說明它們可能的物理意義。

Chapter 8 Laminar Flow

1. (a) 請說明 Laminar flow 及 Turbulent flow 的定義；
(b) 請以 Reynold number 區分 Turbulent flow 及 Laminar flow。

Chap 9. Boundary Layer

2. 假設水平速度的典型尺度為 U ，水平距離的典型尺度為 L ，動力黏滯係數為 ν ，試利用 Navier-Stokes equation 以 U 、 L 及 ν 表示邊界層的平均厚度 $\bar{\delta}$ 。
3. 何為決定邊界層厚度的兩項因素？
4. 請描述一穩定滯流體，當其 Reynold number 分別為 (a) 0.1, (b) 5, (c) 50, 及 (d) 10^5 時，流經一個圓柱體時的特徵。

Chapter 10 Waves

1. 請以數學式說明 (a) 一維，(b) 二維，及 (c) 三維的 propagating waves。
2. (a) 請說明相位速度 (phase speed) 的物理意義及其數學定義；
(b) 請說明群速 (group velocity) 的物理意義及其數學定義。
3. 請以數學式說明頻散波 (dispersive wave) 與非頻散波 (non-dispersive wave) 的相異之處。
4. 請導出線性和諧振盪 (linear harmonic oscillation) 的
(a) 控制方程 (governing equation) 及
(b) 通解 (general solution)。