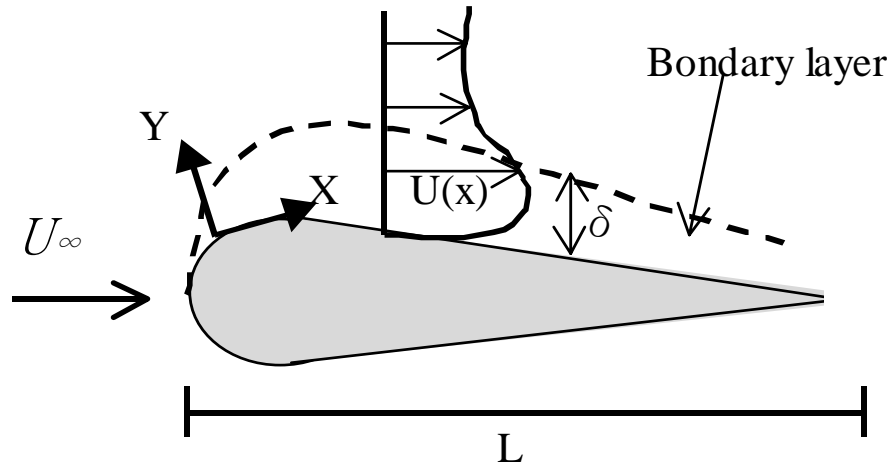


# Chap 9 邊界層 (Boundary Layers)

## §9.1 Introduction

在西元 1905 年，工程師 Ludwing Prandtl 發現在各種不同外形之物體附近有一特別的流場。他首先假設其具有很小的黏滯性，而在除了靠近固體邊界必須滿足不滑動條件 (no-slip condition) 之外，黏滯性是可以被忽略的；當黏滯性接近零時，邊界層的厚度也趨近於零。Prandtl 一方面假設當  $\nu$  很小時，黏滯性的影響必須被忽略；同時，他能夠由邊界必須滿足不滑動條件來證明 drag 的現象，而不論黏滯性有多麼小。他並說明了邊界層內的運動方程式可以被簡單化，這點在以下會作詳細的介紹。自此以後邊界層的概念被廣大的接受，而因數學技術的發展也被公式化。另外，邊界層的概念更被應用於其他的自然科學領域。

## §9.2 Boundary Layer Approximation



《圖 9-1》

《圖 9-1》表示一個二維、不可壓縮的穩定流場，而邊界層的厚度是隨著  $x$  座標改變的，令  $\bar{\delta}$  是邊界層的平均厚度， $\bar{\delta}$  的度量可以由考慮運動方程各項的大小得到。x 方向速度之穩定運動方程如下：

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9-1)$$

0, for steady

0, for incompressible

$$\left( \because \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) \right)$$

令  $u$  為  $U_\infty$ ，此可當作離此物體最遠時之速度，令  $L$  為可觀測到  $u$  改變的距離；因  $u$  在  $L$  之距離中的改變量幾乎等於  $U_\infty$ ，故可將物體的長度當作  $L$ 。

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_\infty}{L}$$

$$\text{故 } u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \quad (9-2)$$

而運動方程中之黏滯力項可表示如下：

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U_\infty}{\delta^2} \quad (9-3)$$

$\delta$  的大小可由在邊界層內之平流項和黏滯力項有相同之 order 來估計，故 (9-2) 和 (9-3) 式須相等可得

$$\bar{\delta} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} \quad (9-4)$$

現在我們來估計氣壓在邊界層內的變化量。實驗的資料顯示，在 high Reynold number 表示氣壓場的分布很接近在物體周圍的不旋轉

流體。故  $\frac{\partial p}{\partial x} \sim \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$

所以  $p \sim \rho U_\infty^2$

我們將所有的變數無因次化，適當的無因次變數如下：

$$\left[ x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{\delta}, u' = \frac{u}{U_\infty}, v' = \frac{v}{U_\infty \cdot \delta / L}, p' = \frac{p}{\rho U_\infty^2} \right], ( )' \Rightarrow \text{無因次化}$$

要注意的是橫越邊界層的距離已被擴大定義成  $y' = \frac{y}{\delta}$ ，故完整的邊界

層之無因次方程式表示如下：

$$\Rightarrow \begin{cases} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{1}{\text{Re}^2} \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Re} \equiv \frac{U_\infty L}{\nu} = \text{Reynold number}$$

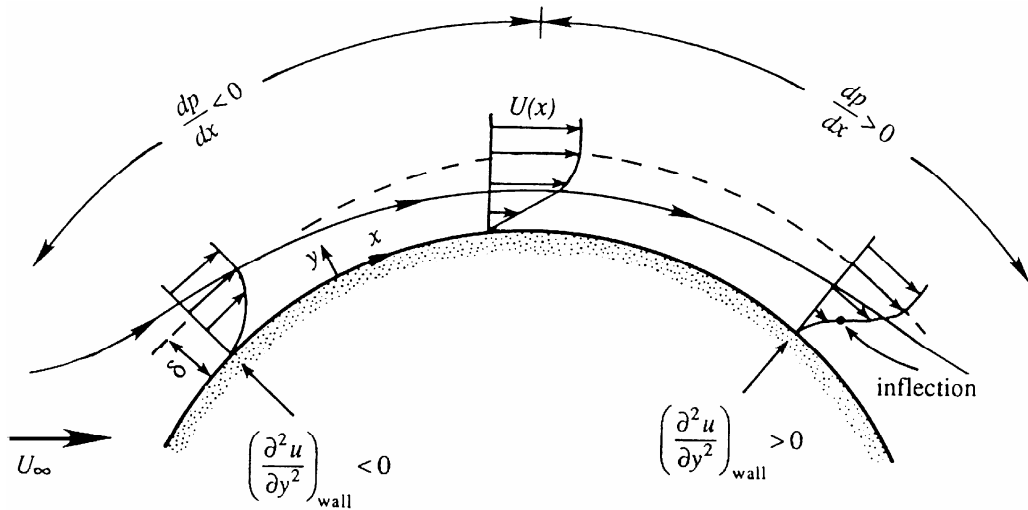
考慮 high Reynold number 的情形，亦即  $\text{Re} \gg 1$  時，無因次的運動方

程將變成：

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \Rightarrow \text{在 } x \text{ 方向上的擴散是不重要的} \\ 0 = -\frac{\partial p'}{\partial y'} \Rightarrow \text{氣壓在 } y \text{ 方向是常數, 亦即在 } y \text{ 方向無氣壓梯度存在} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{array} \right.$$

### §9.3 Effect of Pressure Gradient

前面我們已經討論過平面邊界層的情況，以下我們則要介紹流體流經一曲面邊界時，會受到什麼樣的影響。如《圖 9-2》所示，流體從左方由無窮遠處流經一曲面邊界，以氣流線最高點來分，左側因聚流作用的關係，造成流速  $U(x)$  的增加以及壓力沿  $x$  方向的遞減；而右側則因分散的作用造成  $U(x)$  的減少以及壓力沿  $x$  方向的遞增；所以在這一節中我們要討論的便是針對此種曲面邊界上的氣壓梯度對流場形成的影響。



已 知二維 流場考 慮邊界效應的方程式為

《圖 9-2》 Velocity profiles across boundary layers with favorable and adverse pressure gradients.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9-5)$$

由 Bernoulli eq. 或 inviscid Euler eq. 可導出由外加流場在  $x$  方向上造成的氣壓梯度為

$$\frac{dP}{dx} = -\rho U \left( \frac{dU}{dx} \right)$$

再者，考慮在邊界上的情形時，(9-5) 式則變為

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{wall} = \frac{dP}{dx} \quad (u, v = 0)$$

如果在加速流場中， $\frac{dP}{dx} < 0$ ，則

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{wall} < 0 \quad (\text{accelerating})$$

相對地，在減速流場中， $\frac{dP}{dx} > 0$ ，則

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{wall} > 0 \quad (\text{decelerating})$$

由此可知，在此曲面邊界的某處一定有一反曲點可以使得  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 。並且，在這種情況的流場中，氣壓梯度的遞減將有助於邊界層厚度的增加，我們可以由下列的方程式得到證明

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow v(y) &= -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ \text{又 } \frac{dp}{dx} &= -\rho u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \therefore \frac{dp}{dx} \downarrow &\text{即 } \frac{\partial u}{\partial x} \uparrow \\ \text{則 } v(y) &\uparrow \end{aligned}$$

因為外加流場的減速加上流經邊界時因摩擦引起的減速，造成一個更大的  $\left( -\frac{\partial u}{\partial x} \right)$  項，所以使得  $v$  沿著遠離邊界的方向向上增加，同時也增加邊界層的厚度。

若  $P$  沿氣流線方向遞減， $\frac{dP}{dx} < 0$ ，則我們稱此種氣壓梯度為

“**favorable**”；相反地，若  $P$  沿氣流線方向遞增， $\frac{dP}{dx} > 0$ ，則稱為

“**adverse**”。另外，關於邊界厚度在一減速流場中的快速增加，和  $v$  速度場的關係，引起的重要現象—分流 (**Separation Flow**)，我們將在下一節中說明。

※註:

決定邊界層厚度的兩項因素：

1. viscous diffusion
2. advection away from the surface

## §9.4 Flow separation

見《圖 9-3》

當一流場迅速的流經該邊界時，在末端處將會逐漸緩慢下來，並產生一向上方向的氣壓梯度，造成該處流場有一回流現象。回流的流場（backward flow）與原先的主流場(mainstream)在邊界物體上有一交點 S，在 S 點附近的流動都會被引導至主流場。我們可以由氣流線瞭解主流場與回流場的分布情形，這樣的現象稱之為 Separation。

為了對 S 點做更精確的描述，我們可以用下式表之：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{wall} = 0 \quad (\text{separation})$$

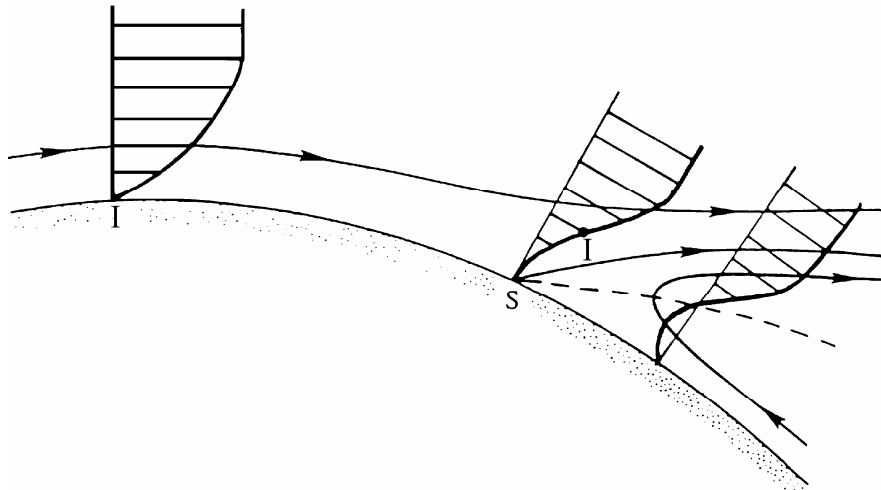
實驗證實，若在邊界層速度是分布層狀的（laminar）時，S 點的位置十分明顯地受到 Reynold number 的影響。然而，倘若邊界層有亂流（turbulent）的情形，則 separation 的情形會較為延後，意即擾動的邊界層能對回流的氣壓梯度力有較大抗衡的能力。（見《圖 9-4》）

參閱《圖 9-5》，為流場流經一高散度管（highly divergent channel）時的 separation 情形。

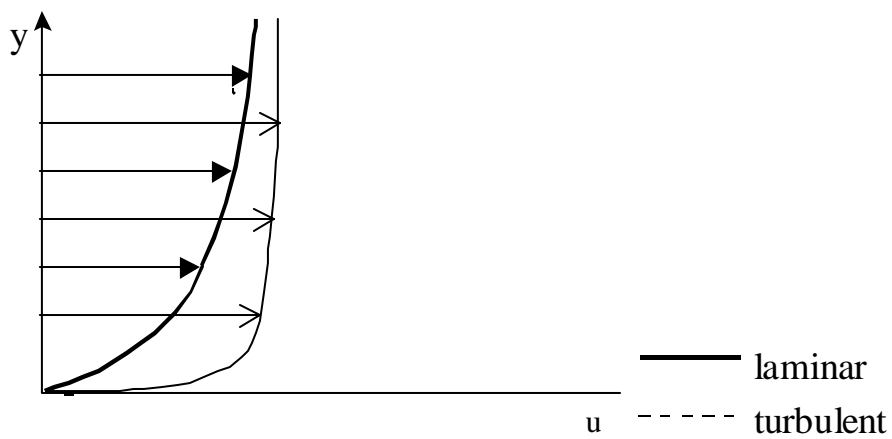
參閱《圖 9-6》，此為低 Reynold number ( $4 < Re < 40$ ) 的 separation 情形，值得一提的是，高 Reynold number 的流場，其回流及 separation 的情形將會十分不穩定(unsteady)且混亂(chaotic)。

《圖 9-6》是當  $Re=55$ ，回流的氣流線會有呈圓柱旋轉的情形，由於這個現象是 Von Karman 所發現，故以該名命之為 Karman Vortex Street。

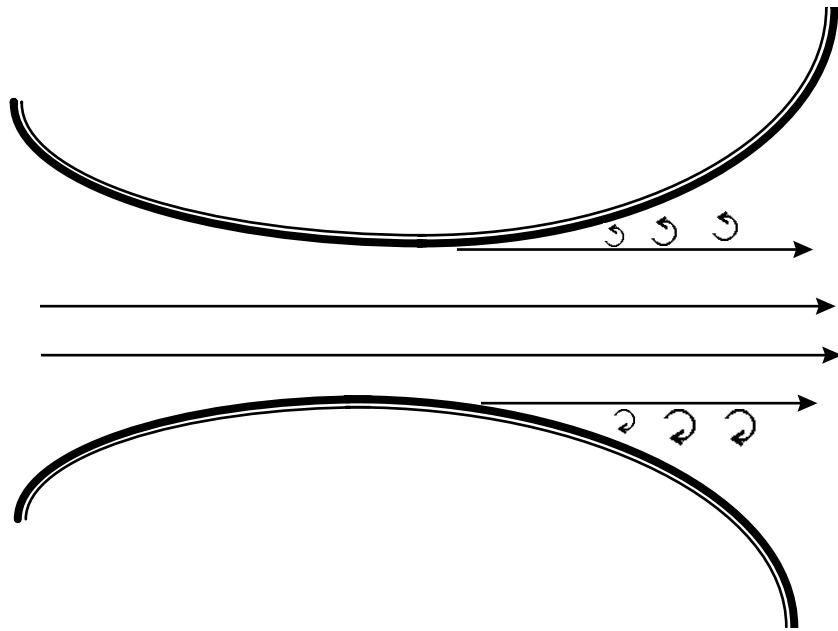
前面曾經提到高 Reynold number 的流場，其回流及 separation 的情形將會十分不穩定(unsteady)且混亂(chaotic)。事實上，當  $Re < 3 \times 10^5$  的流場都是成層狀分布（laminar）的。而  $Re \sim 3 \times 10^5$  的流場可出現旋轉的氣流，當  $Re > 3 \times 10^5$  時，才會出現如《圖 9-7》的不穩定及混亂的流場情形。



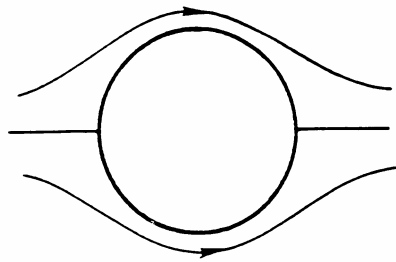
《圖 9-3》Streamlines and velocity profiles near a separation point S. Point of inflection is indicated by I. The dashed line represents  $u=0$ .



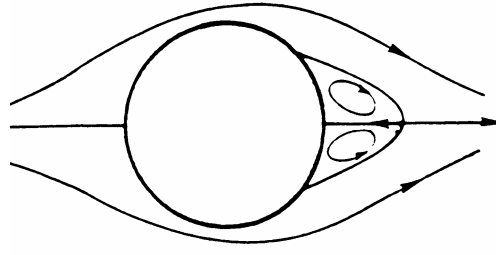
《圖 9-4》 Comparison of laminar and turbulent velocity profiles in a boundary layer.



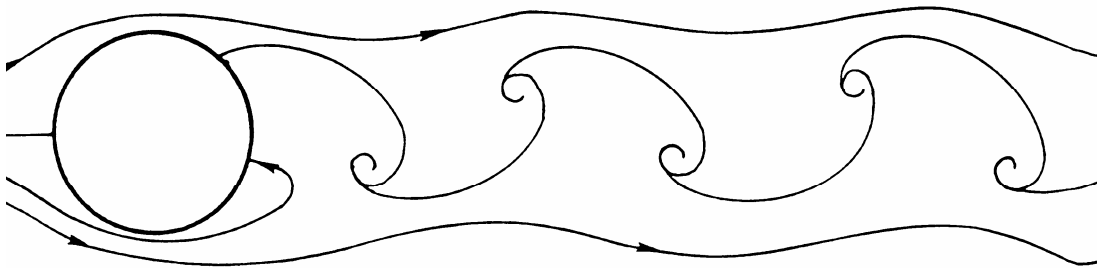
《圖 9-5》 Separation of flow in a highly divergent channel.



$Re < 4$

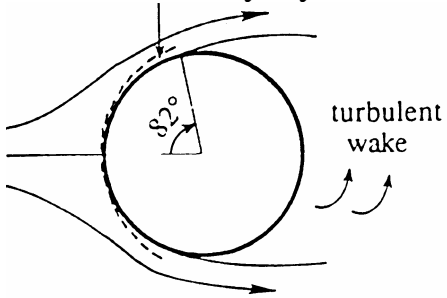


$4 < Re < 40$



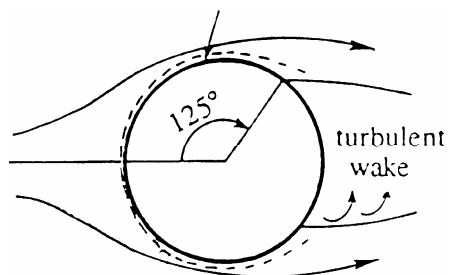
$40 < Re < 200$

laminar boundary layer



$Re < 3 \times 10^5$

turbulent boundary layer



$Re > 3 \times 10^5$

《圖 9-6》 Some regimes of flow over a circular cylinder.