

Chapter 6 Irrotational flow

§6.0 無旋性流的定義

無旋性流 (irrotational flow) 又可以稱之為 potential flow，我們可以由它的名字直接的理解它的定義：即渦度為 0

$$\bar{\Omega} = \nabla \times \bar{V} = 0$$

§6.1 速度位 (Velocity potential)

定義：

$$\bar{V} = \nabla \phi$$

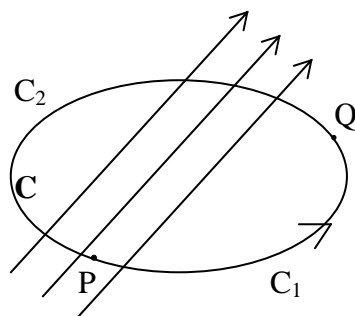
其中 ϕ 即是 velocity potential

我們亦可以將其表示為：

$$\bar{V} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

因為是無旋性流

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{V} &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \phi) &= 0 \end{aligned}$$



《圖 6-1》

想像一流場

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{C_1}^Q \vec{V} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2}^P \vec{V} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

$$\text{又} \because \Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} = \iint (\nabla \times \nabla \phi) \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{C_1}^Q \vec{V} \cdot d\vec{l} &= - \int_{C_2}^P \vec{V} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{C_2}^Q \vec{V} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

→ line integral is independent of integration path (與積分路徑無關)

$$\Rightarrow \int_{C_1}^Q \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2}^Q \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \int_P^Q d\phi = \phi(Q) - \phi(P)$$

小記：

若在不可壓縮的流場中

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

此時 ϕ 為一諧和函數 (harmonic function)

§6.2 Helmholtz Thm.

複習：散度 (divergence)

$$\text{div} \vec{V} \equiv S = \nabla \cdot \vec{V} \dots \dots \dots (S \in R)$$

渦度 (vortex)

$$\text{curl} \vec{V} \equiv \vec{C} = \nabla \times \vec{V}$$

考慮流場在無限遠處速度漸消失 (no boundary) → Why?

令

$$\nabla \times \vec{V}_\phi = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{V}_\psi = 0$$

則 $\vec{V} = \vec{V}_\phi + \vec{V}_\psi$

\downarrow \searrow
irrotational **non-divergent**
 $\Rightarrow \vec{V} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$

§6.3 Boundary condition

一般在探討流體力學時，我們必須將流體分為一般部分及邊界層兩部份分別探討。(詳見 2.3 及 Chapter 9) 但邊界的情況亦不是一成不變單一的情形，學術上定義出了兩種邊界情形以分別討論之。

(1) 運動邊界 (Kinematic B.C.)

運動邊界基本上需滿足兩個條件，即 (i) 無縫隙 (no gap)

(ii) 無滲透 (no penetration)

運動邊界的兩種適用情形：

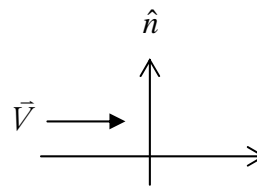
A. stationary B.C.

$$\hat{u} \cdot \hat{n} = 0$$

B. moving B.C.

$$\hat{u} \cdot \hat{n} = \hat{u}_b \cdot \hat{n}$$

$$(\hat{u} - \hat{u}_b) \cdot \hat{n} = 0$$

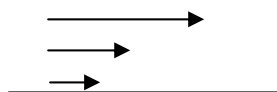


《圖 6-2》

(1) 動力邊界 (Dynamic B.C.)

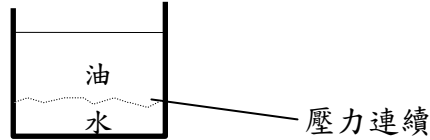
符合動力邊界需有三條件

A. Irrotational flow, no shear stress at the boundary



《圖 6-3》

B. Pressure variation must be continuous across the surface of contact (why ?)



《圖 6-4》

C. Internal disturbance doesn't affect fluid at ∞

e.g.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m^2u - (m > 0)$$

$$u = Ae^{mx} + Be^{-mx} \quad \because u(x \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A = 0$$

§6.4 2-D incompressible potential flow

在前面幾節之中，我們已經知道何謂 incompressible 和 potential 了！所以現在我們就用 incompressible 和 potential 的定義來探討 2-D incompressible potential flow。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{v} = 0 \quad \cdots \text{potential flow} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \cdots \text{incompressible flow} \end{array} \right.$$

§6.4~1 Stream function in 2-D flow

在 2.5 節之中，我們已經知道如何去描述氣流線。在這一小節中，我們將用速度位的觀念來寫出 stream function。

(1) For potential flow

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{non-divergent}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

(2) For non-divergent flow

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \xrightarrow{\text{potential}} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

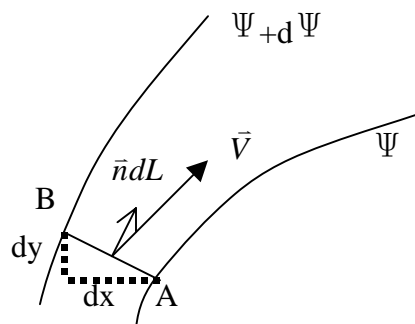
\Rightarrow 稱 ϕ 及 ψ 為 harmonic function

我們就利用以上的關係式，把 the equation of streamline 改寫成另一種形式。

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \Rightarrow \quad udy - vdx = 0$$

$$\Rightarrow d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0, \quad \psi = \text{constant along streamline} \quad (6-1)$$

§6.4~2 Stream fn. and Areal rate of flow in 2-D flow



《圖 6-5》

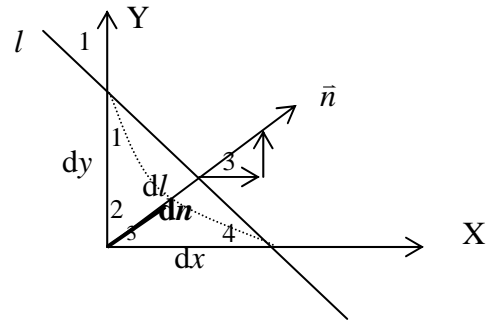
在這一小節中，我們將探討 the areal rate of flow in 2-D。

$$\begin{cases} dq = \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \vec{v} \cdot \vec{n} dl \\ \vec{n} = \frac{\partial x}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial n} \vec{j} \end{cases} \quad (6-2)$$

現在我們再將式(6-2)整理一下，並把 ψ 值代入。我們可以得到式

(6-3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial n} &= \nabla X \cdot \vec{n} = \vec{i} \cdot \vec{n} \\ &= \cos(\angle 3) = \cos(\angle 1) = \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= \nabla Y \cdot \vec{n} = \vec{j} \cdot \vec{n} \\ &= \cos(\angle 2) = \cos(\angle 4) = -\frac{\partial x}{\partial l} \end{aligned}$$



《圖 6-6》

$$\begin{aligned} dq &= \left(u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} \right) dl = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial x}{\partial l} \right) \right] dl = \partial \psi \\ q &= \int_A^B dq = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (6-3) \end{aligned}$$

⇒兩氣流線之差值：代表兩項所夾區域內流體之 areal rate of flow

§6.4~3 Stream function in polar coordinate

我們現在就把在 6.4~1 之中所求到的 stream function 放到 polar coordinate 上來看看!!我們先將 x 、 y 以極座標表現出來：

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{r} \cos\theta & u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{r} \sin\theta & v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

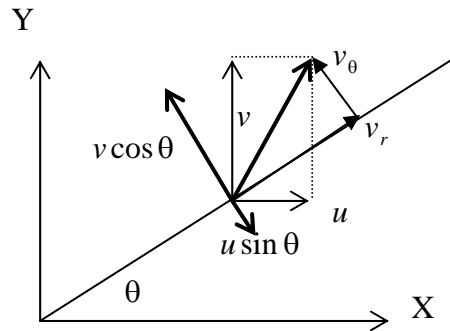
現在我們再將 $\psi(x, y)$ 中的 (x, y) 以上面的關係式代入，得到

$\psi(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = -v \cos \theta + u \sin \theta = -v_\theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -v (-r \sin \theta) + u (r \cos \theta) = r v_r \end{cases}$$

同理可證

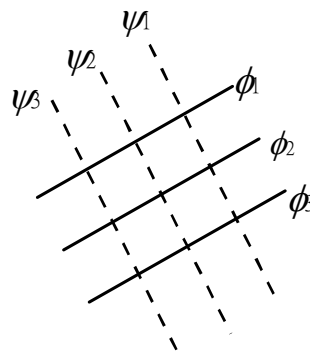
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_r \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r \cdot V_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}$$



《圖 6-7》

§6.4~4 Flow net

在經過前面各小節的敘述後，相信大家對 velocity potential 也有清楚的認識。現在我們就來說明一個在 2-D irrotational incompressible flow 中所特有的現象 **flow net**。



《圖 6-8》

我們在一體平面上可以分別找到等 ϕ 線(Equipotential line)與等 ψ 線(streamline)，如《圖 6-8》。我們可以發現一個重要的特性，那就是等 ψ 線必定垂直於等 ϕ 線。這是為什麼？下面我們就分別從數學及物理的觀點來解釋。

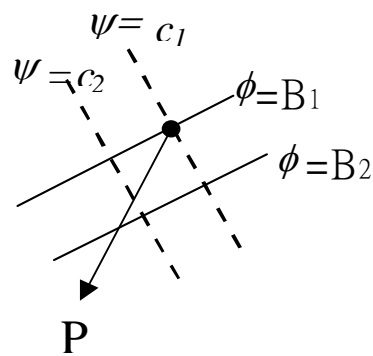
物理觀點： ψ 之定義便是 \vec{v} 在瞬時之連線。

$$\text{又 } \vec{v} = \nabla\phi$$

$$\therefore \vec{v} \perp \phi \text{ 的等值線}$$

$$\Rightarrow \psi \text{ 的等值線 } \perp \phi \text{ 的等值線}$$

數學觀點：如《圖 6-9》，



《圖 6-9》

1. following $\psi = C_1$,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi = c_1} = - \frac{\partial\psi}{\partial x} / \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

2. following $\phi = B_1$,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial x} dx = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi = B_1} = - \frac{\partial\phi}{\partial x} / \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

3. at point p ,

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi = B_1} = \left(- \frac{\partial\phi}{\partial x} / \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_P = - \frac{u}{v}$$

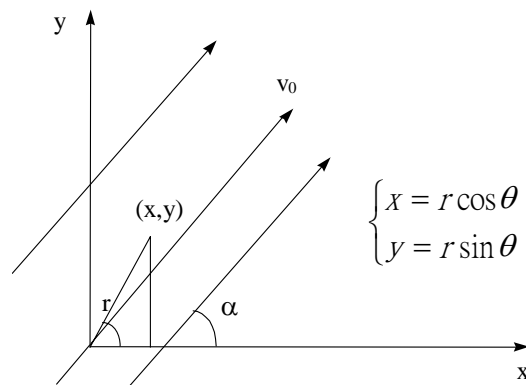
$$= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right)_P = - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi = C_1}}$$

$$\therefore (\phi = B_1) \perp (\psi = C_1)$$

§6.5 Two-dimensional (2-D) simple potential flow

§6.5~1 Uniform flow (均勻流)

下圖《圖 6-10》表示一速度為 v_0 的uniform flow，其與x軸的夾角為 α 。



《圖 6-10》

其速度的 u 、 v 分量可表示如下：

$$u = v_0 \cos \alpha = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6-4)$$

$$v = v_0 \sin \alpha = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6-5)$$

由 (6-4) 式：

$$\phi = \int v_0 \cos \alpha dx + f(y) = (v_0 \cos \alpha)x + f(y)$$

代入 (6-5) 式：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = v_0 \sin \alpha$$

$$f(y) = (v_0 \sin \alpha)y + c_1$$

$$\text{由此，可得 } \phi = (v_0 \cos \alpha)x + (v_0 \sin \alpha)y + c_1 \quad (6-6)$$

同樣的，我們可求出 φ ：

$$\varphi = \int v_0 \cos \alpha dy = (v_0 \cos \alpha)y + f(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -v_0 \sin \alpha$$

$$f(x) = -(v_0 \sin \alpha)x + c_2$$

$$\varphi = -(v_0 \sin \alpha)x + (v_0 \cos \alpha)y + c_2 \quad (6-7)$$

在大部分的情況中，我們會將常數 C_1 、 C_2 省略，因為它們並不會影響 ϕ 和 φ 的形式及結構。故令 $C_1 = C_2 = 0$ ，則 ϕ 和 φ 的方程式以極座標表示如下：

$$\phi = (v_0 \cos \alpha)x + (v_0 \sin \alpha)y$$

$$= (v_0 \cos \alpha)r \cos \theta + (v_0 \sin \alpha)r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \phi = v_0 r \cos(\theta - \alpha) \quad (6-8)$$

$$\varphi = -(v_0 \sin \alpha)x + (v_0 \cos \alpha)y = -(v_0 \sin \alpha)r \cos \theta + (v_0 \cos \alpha)r \sin \theta$$

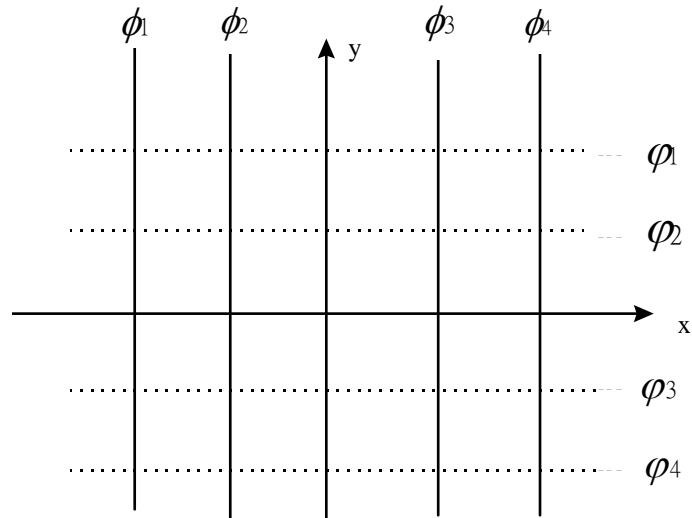
$$\Rightarrow \varphi = v_0 r \sin(\theta - \alpha) \quad (6-9)$$

由以上的方程式，令 $\alpha = 0$ ，則

$$\phi = v_0 r \cos \theta = v_0 x$$

$$\varphi = v_0 r \sin \theta = v_0 y$$

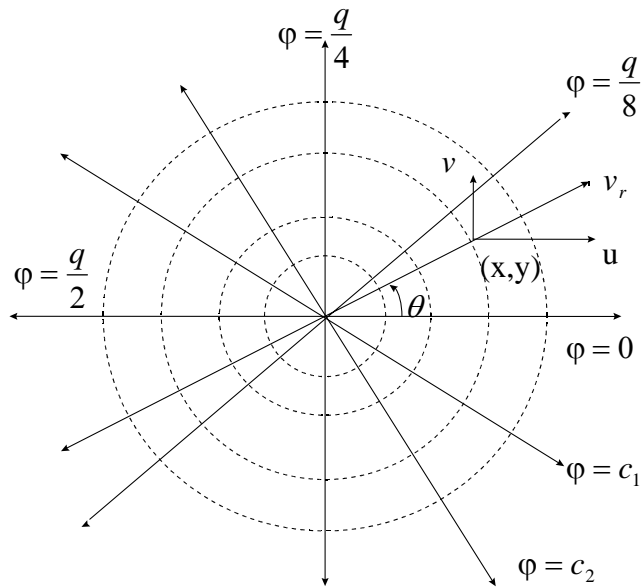
而 ϕ 及 φ 的圖形將如下圖：



《圖 6-11》

§6.5~2 Two-dimensional Source and Sink

下圖《圖 6-12》為一具放射狀氣流線的流體。



《圖 6-12》

若流體的速度向量由中心指向外，則稱此流體為源 (source)；相反的，若速度向量指向中心，就稱為匯 (sink)。而其速度以極座標

表示如下：

$$\begin{cases} v_\theta = 0 \\ v_r = \frac{q}{2\pi r} \end{cases}$$

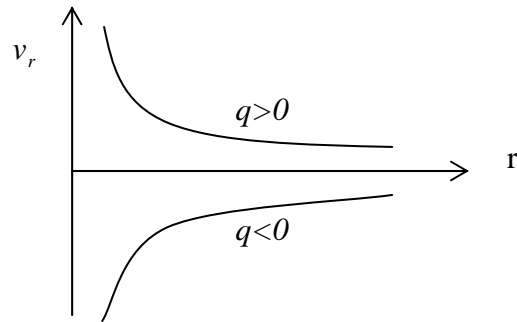
$$\int \vec{v}_r \cdot n d\vec{l} = q \quad \text{通量}$$

其中 q 表示中心點流體的通量（即 total areal rate of flow）。若 $q >$

0 ，稱為 source；相反的，若 $q < 0$ ，稱為 sink。

又

$$\begin{cases} v_\theta = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \end{cases}$$



《圖 6-13》

故可求得

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r \quad (6-10)$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \theta \quad (6-11)$$

我們亦可算出此流體的環流(Γ)，設此一封閉路線的半徑為 r ，則

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} v_\theta \cdot r d\theta = 0$$

由上圖《圖 6-13》可將其速度改為 x 、 y 座標：

$$u = v_r \cos \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{x}{r} = \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = v_r \sin \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{y}{r} = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

而 velocity potential (ϕ) 及 stream function (φ) 亦可寫為

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r = \frac{q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

§6.5~3 Two-dimensional Free Vortex (自由渦旋)

自由渦旋的氣流線是以渦旋為中心的同心圓，而其在每點的速度，以極座標表示如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{array} \right.$$

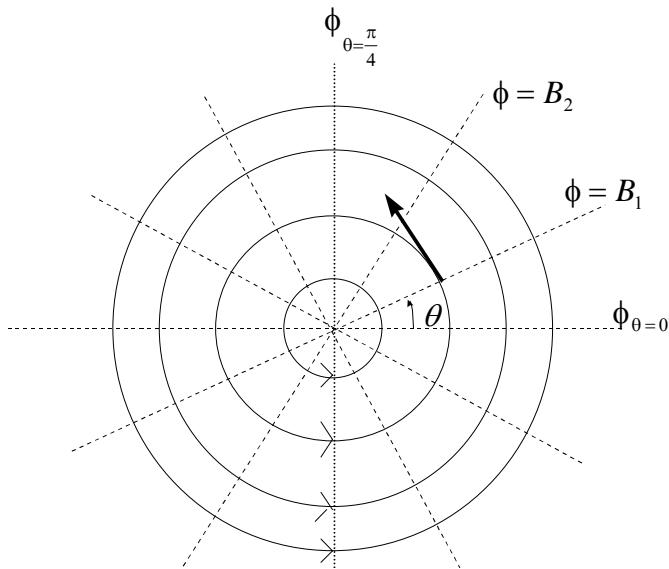
自由渦旋的運動，因中心點的速度趨近於無限大，故除了中心點之外，是不旋轉。因此，自由渦旋的中心點是一 singular point。

故由以上二式，可得：

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6-12)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (6-13)$$

這兩個方程式表示自由渦旋和 source 及 sink 的流網，具有相同的形式；只是放射狀的線現在是等位線，而同心圓則變成氣流線。自由渦旋的流網可表示如下圖《圖 6-14》：



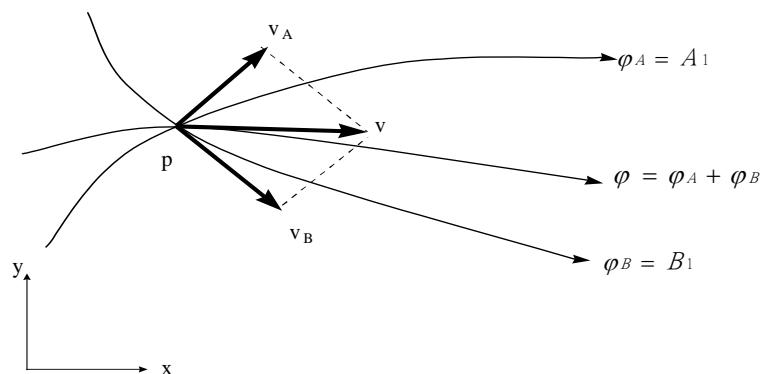
《圖 6-14》

§6.5~4 Superposition of Simple Flows

Combined flow 的 ϕ 及 ψ 方程式是由不同的 simple flow 之 ϕ 及 ψ 方程式分別相加而得的。因為 simple flow 之 ϕ 及 ψ 都是 harmonic function，故可由簡單的加法求出 combined flow 的 ϕ 及 ψ 。

(The stream fn. of a combined flow is the sum of the stream fns. of its component flow.)

如下圖《圖 6-15》， $\phi_A = A_1$ 、 $\phi_B = B_1$ 表示兩條通過 p 點的氣流線，而這兩個流體通過 p 點的速度分別為 v_A 及 v_B 。



《圖 6-15》

當此兩流體疊加時，其在p點的速度 v 必為 v_A 及 v_B 的向量和，如下：

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_B$$

$$u = u_A + u_B$$

$$v = v_A + v_B$$

利用 $u = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ 、 $v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ，可得：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_A}{\partial y} + \frac{\partial \psi_B}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\psi_A + \psi_B) \Rightarrow \psi = \psi_A + \psi_B + f(x)$$

$$\text{又：} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_A}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi_B}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\psi_A + \psi_B)$$

$$\text{即：} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const.} \xrightarrow{\text{take}} f(x) = 0$$

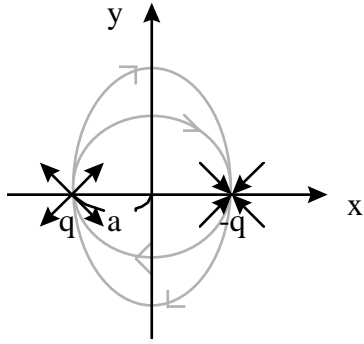
因此 $\phi = \phi_A + \phi_B$ 。

利用相同的方法，我們亦可求出 combined flow 的速度位(ϕ)：

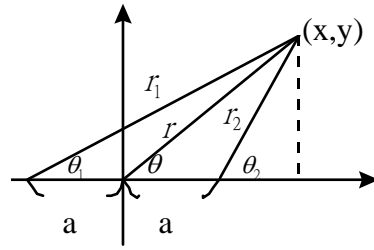
$$\phi = \phi_A + \phi_B。$$

§6.5~5 Combined flow field of Source and Sink of equal strength

經由前面幾節的介紹，相信大家對於二維的簡單流場已具有一定的基本概念，接下來，我們便要利用簡單流場的疊加性，來討論將某些流場連結後所產生的現象。首先，我們考慮一由距中心點等距的 source 和 sink 所組成的二維流場，其流場分佈如下圖所示



《圖 6-16》



《圖 6-17》

則對平面上任一點 (x, y) 而言 (如《圖 6-17》), 其 stream function (ψ) 為

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_{source} + \Psi_{sink} \\ &= \frac{q}{2\pi}\theta_1 + \frac{-q}{2\pi}\theta_2 \\ &= \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

其中

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right), \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)$$

且根據三角函數的運算規則

$$\tan^{-1}\alpha - \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right) \quad \alpha, \beta \text{ 爲任兩數值}$$

所以

$$\psi = -\frac{q}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \quad (6-14)$$

$$-\frac{2\pi\psi}{q} = \tan^{-1}\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$-\tan\left(\frac{2\pi\psi}{q}\right) = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

若令 (6-14) 式等於任一常數 c , 便可以將 stream function 改寫成不

含 ψ 的形式

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 2ay \cdot \cot\left(\frac{2\pi c}{q}\right) &= a^2 \\
 \Rightarrow x^2 + \left[y + a \cdot \cot\left(\frac{2\pi c}{q}\right) \right]^2 &= a^2 + a^2 \left[\cot\left(\frac{2\pi c}{q}\right) \right]^2 = a^2 \left[\csc\left(\frac{2\pi c}{q}\right) \right]^2 \\
 \Rightarrow \text{圓心為 } \left(0, -a \cot\left(\frac{2\pi c}{q}\right) \right) &\text{ 的圓族}
 \end{aligned}$$

同樣地，我們也可計算 velocity potential(ϕ) 如下

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi_{source} + \phi_{\sin k} \\
 &= \frac{q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi} \ln r_2 \\
 &= \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi} \ln\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right] \stackrel{\text{令}}{=} B \quad (\text{等速度位線}) \\
 \Rightarrow \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} &= e^{\frac{4\pi B}{q}} \\
 \Rightarrow y^2 + \left[x + a \left(\frac{1 + e^{\frac{4\pi B}{q}}}{1 - e^{\frac{4\pi B}{q}}} \right) \right]^2 &= a \cdot \frac{2}{e^{\frac{-2\pi B}{q}} - e^{\frac{2\pi B}{q}}}
 \end{aligned}$$

且根據

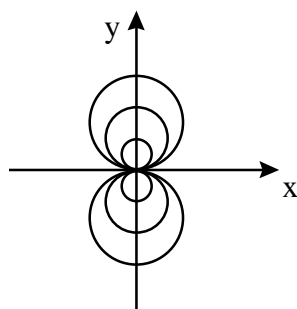
$$\coth \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} = \frac{1 + e^{2\alpha}}{1 - e^{2\alpha}}, \quad \operatorname{csc} h \alpha = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$$

則

$$\begin{aligned}
 y^2 + \left[x - a \cdot \coth\left(\frac{2\pi B}{q}\right) \right]^2 &= \left[a \cdot \operatorname{csc} h\left(\frac{2\pi B}{q}\right) \right]^2 \\
 \Rightarrow \text{圓心為 } \left(a \coth\left(\frac{2\pi B}{q}\right), 0 \right) &\text{ 的圓族}
 \end{aligned}$$

§6.5~6 二維的偶流 (2-D Doublet)

若是如同 6.5~5 節，將二維的 source 和 sink 連結，但是把兩者之間的距離縮得很小(即 $a \rightarrow 0$)，並且增加 q 而使得 $2aq = m = \text{const}$ ，則我們稱此種流場為二維的偶流 (2-D Doublet)，如《圖 6-18》。



《圖 6-18》

此時的 stream function 為

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{a \rightarrow 0, 2aq=m} -\frac{q}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} -\frac{q}{2\pi} \frac{2ay}{x^2 + y^2} \\ &\left(\begin{array}{l} \because \tan^{-1} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + \dots \\ \therefore \lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan^{-1} \alpha \cong \alpha \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \psi = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{令}}{=} c \\ &\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{m}{4\pi c} \right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi c} \right)^2 \end{aligned}$$

倘若以極座標的觀點來看，則

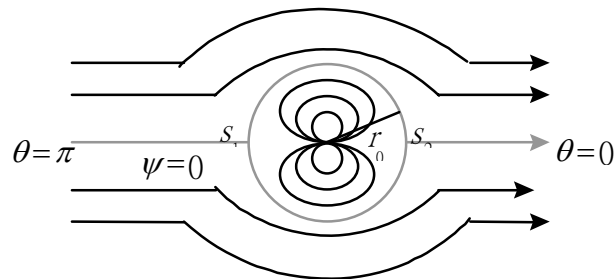
$$\psi = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{r \cdot \sin \theta}{r^2}$$

因為等 ψ 線和等 ϕ 線正交，又可以得到

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{r \cdot \cos \theta}{r^2} \\ &= \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{令}}{=} B \\ \Rightarrow \left(x - \frac{m}{4\pi B}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{m}{4\pi B}\right)^2\end{aligned}$$

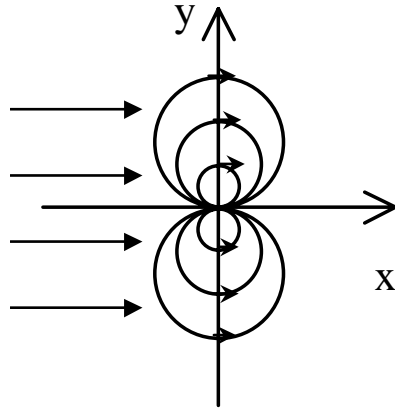
§6.5~7 Combined flow field of a Uniform flow and a Doublet

考慮一均勻流場和二維偶流的連結，如下圖，就如同一個均勻流，流經一圓形體而沒有產生環流，且此圓形體的中心即為偶流的中心並將整個偶流包含在內。



《圖 6-19》

stream function 為



《圖 6-20》

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{unif} + \psi_{doublet} \\ &= v_0 r \cdot \sin \theta - \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = c\end{aligned}$$

假設 $c = 0$

$$\Rightarrow \left(v_0 r - \frac{m}{2\pi r} \right) \sin \theta = 0$$

$$\square r = \sqrt{\frac{m}{2\pi v_0}} \equiv r_0 \rightarrow \text{like a cylinder lying there}$$

$$\Rightarrow m = 2\pi v_0 r_0^2$$

$$\text{當 } v_0 \uparrow \Rightarrow r_0 \downarrow$$

$$m \uparrow \Rightarrow r_0 \uparrow$$

□再討論 $r=r_0$ 處的速度分布

$$\Rightarrow \psi = v_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

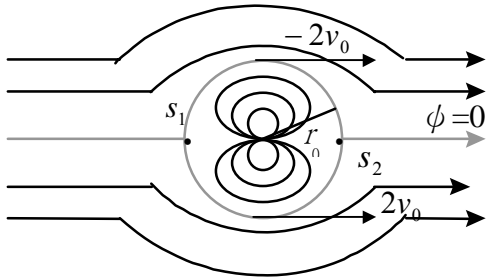
$$\text{At } r = r_0 \Rightarrow v_r = 0, v_\theta = -2v_0 \sin \theta$$

$$v_\theta (\theta = 0, \pi) = 0$$

$$v_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) = -2v_0$$

其中 $\theta=0, \pi$ 時的兩點 (s_1, s_2)，因為兩流線相交，唯一的可能是速度

為零，稱為停滯點 (stagnation point)。



《圖 6-21》

Question：若均勻流的 V_0 為相反方向 (即由 $X_+ \rightarrow X_-$)，情況又會是如何？

此外，本節的討論和 a uniform flow past a cylinder without circulation 的情形有類比性，可以替代討論。

§6.5~8 Bernoulli's eq. for an Irrotational flow

$$-\frac{\nabla P}{\rho} + \bar{g} = \frac{d\bar{V}}{dt} = (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$$

$$(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} = \nabla \left(\frac{|\bar{V}|^2}{2} \right) - \bar{V} \times (\nabla \times \bar{V})$$

0, for irrotational flow

$$\begin{aligned} -\frac{\nabla P}{\rho} + \bar{g} &= \nabla \left(\frac{|\bar{V}|^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) \\ &= \nabla \left(\frac{|\bar{V}|^2}{2} \right) + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(-\frac{\nabla P}{\rho} + g\nabla Z + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \right) \cdot d\vec{r}$$

↓
any displacement

$$\rightarrow \frac{dP}{\rho} + g dZ + d \left(\frac{V^2}{2} \right) + d \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$$

if $\rho = \text{const.}, g = \text{const.}$

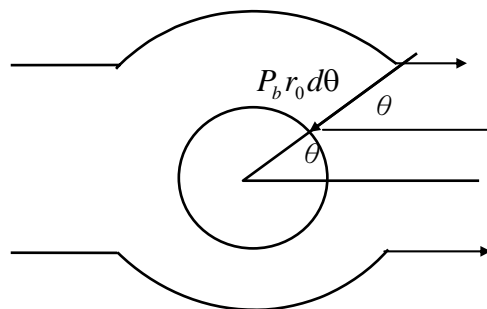
$$\rightarrow \frac{P}{\rho} + gZ + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = B(t)$$

For steady flow :

$$\rightarrow \frac{P}{\rho} + gZ + \frac{V^2}{2} = B$$

For irrotation flow, the conservation of B can be extend to any displacement in the entire irrotational flow field

§6.5~9 Drag and Lift for an Immersed Cylinder with no Circulation



《圖 6-22》

在無旋性流(irrotational flow)中，其 drag 與 lift forces 可表為：

$$\begin{cases} dF_{drag} = -P_b r_0 d\theta \cos \theta \\ dF_{lift} = -P_b r_0 d\theta \sin \theta \end{cases}$$

由白努利方程式(Bernoulli's eq.)：

$$\frac{P}{\rho} + gZ + \frac{V^2}{2} = const.$$

$$Z=0 \quad (\text{考慮平面流場})$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = const.$$

$$\text{At } \infty, u = V_0 \quad (\text{無窮遠處擾動不影響})$$

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{V_b^2}{2} + \frac{P_b}{\rho}$$

$$P_b = P_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} - \frac{\rho(-2V_0 \sin \theta)^2}{2}$$

$$\begin{cases} F_D = \int_0^{2\pi} dF_D = \int_0^{2\pi} \left(P_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} - \rho \frac{(-2V_0 \sin \theta)^2}{2} \right) r_0 \cos \theta d\theta = 0 \\ F_L = \int_0^{2\pi} -P_b r_0 d\theta \sin \theta = 0 \end{cases}$$

⇒與實驗不符 (1750 d'Alembert paradox)

∴ irrotational flow → no viscous stress

But in real flow (e.g. water in air), there is small viscosity near boundary layer.

⇒ viscous force locally important

⇒ rotational flow

§6.5~10 Combined Flow Field of Uniform Flow, Doublet
and Free Vortex

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{unif} + \varphi_{doublet} + \varphi_{fv} \\ &= V_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \xrightarrow{\text{令}} C \quad (\text{令 } \Gamma \text{ 以順時針為正})\end{aligned}$$

$$\text{at } r = r_0 \Rightarrow \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_0 \rightarrow \text{常數}$$

$$\begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -V_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

$$\text{at } r = r_0 \quad v_r = 0 \quad ; \quad v_\theta = -2V_0 \sin \theta - (\Gamma / 2\pi r_0)$$

則 stagnation point :

$$v_\theta = (v_\theta)_{r=r_0} = 0$$

$$-1 \leq \sin \theta_s = \frac{-\Gamma}{4\pi r_0 V_0} \leq 1$$

$$(1) \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_0} \right)^2 < r_0^2 \quad (\text{參照附錄圖一}) \quad S_1, S_2 \text{ 在三、四象限}$$

$$(2) \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_0} \right)^2 = r_0^2 \quad (\text{參照附錄圖二}) \quad S$$

$$(3) \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_0} \right)^2 > r_0^2 \quad (\text{參照附錄圖三}) \quad S \text{ 不在 } r=r_0 \text{ 上}$$

(稱 S 為鞍形點；流場為鞍形場)

physics :

uniform flow past a cylinder with circulation , and this can be experimented by rotating a cylinder in a fluid stream.

$$P_b = P_0 + \frac{1}{2}(\rho V^2 - \rho V_b^2) = P_0 + \frac{1}{2}\rho \left[V_0^2 - \left(2V_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 \right]$$

$$F_D = \int_0^{2\pi} -P_b r_0 \cos \theta d\theta = 0$$

$$F_L = \int_0^{2\pi} -P_b r_0 \sin \theta d\theta = \rho V_0 \Gamma \text{ (向上 lift)} \rightarrow \text{Kutta-Joukowski}$$

Theorem

※ 小記：

Magnus effect (1852)

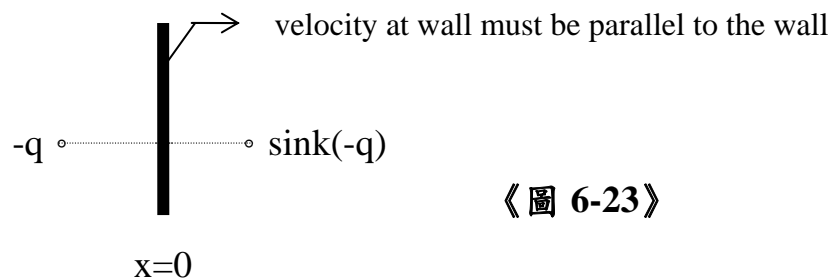
→ lift force produced by circulation

e.g. curved pitch of a baseball

§6.6 Method of Image

討論流體的運動時，由於邊界問題往往十分複雜，難以將其氣流線繪出。於是科學家們找出了這樣的一個方法，將邊界視為一對稱軸，假想對稱軸的另一端有一相同的流場，此時對稱軸兩端的流場相互作用而可繪成氣流線。此方法稱為鏡像法。如下圖：

(1) sink



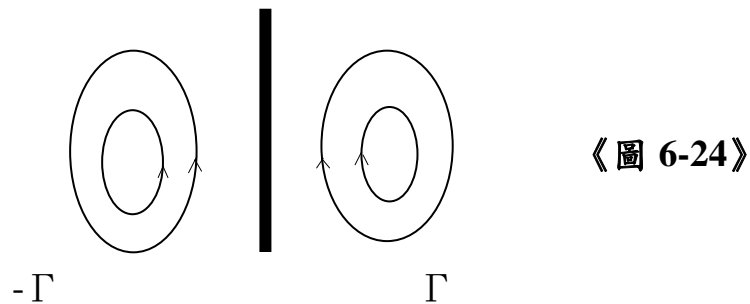
《圖 6-23》

假想另一邊有一相同之 sink 取代牆的效應：

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\sin k(x=a)} + \phi_{\sin k(x=-a)} \\ &= \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right) + \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right) \quad (\text{for } x > 0) \\ \phi &= \frac{q}{4\pi} \ln\left((x-a)^2 + y^2\right) + \frac{q}{4\pi} \ln\left((x+a)^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

Question : free vortex 在靠近邊界時會有什麼現象？

(2) free vortex



這樣的方法不僅應用在流體力學，自然科學中仍有許多學

科利用這種方法，電磁學便是一例。

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{電場不會旋轉})$$

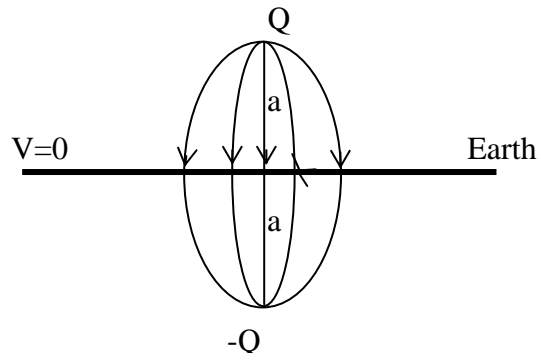
$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{電位高} \rightarrow \text{電位低})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\rho: \text{電荷密度(電量/體積)})$$

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \iiint \nabla \cdot \vec{E} dV = \iiint -\nabla^2 V dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$V = \frac{Q}{R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$



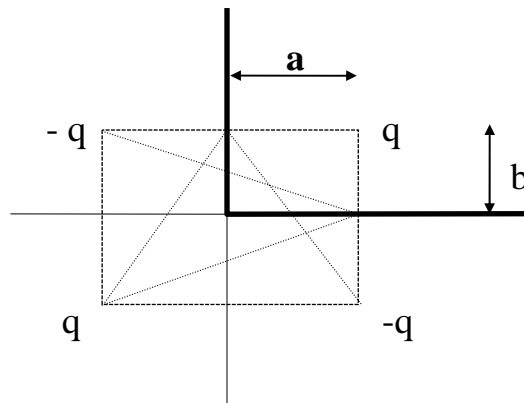
《圖 6-25》

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

$$R_+^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2$$

$$R_-^2 = x^2 + (y + a)^2 + z^2$$

若邊界為垂直相交之兩面，如下圖則處理方法亦無兩異。



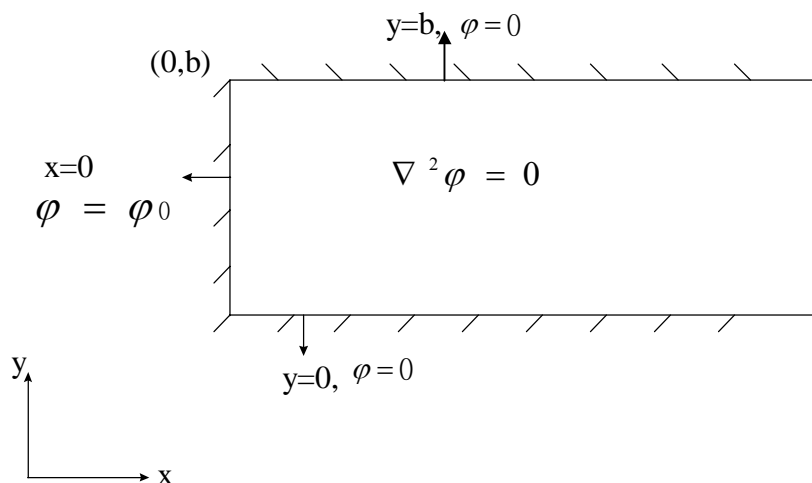
《圖 6-26》

§6.7 邊界條件 (Boundary Condition)

有一二維、不旋轉、non-divergent 的流體，其邊界條件如下：

$$\text{針對 } y \begin{cases} \varphi(x,0) = 0 \\ \varphi(x,b) = 0 \end{cases} ; \text{ 針對 } x \begin{cases} \varphi(0,y) = \varphi_0 \\ \varphi(\infty,y) = \text{finite} \end{cases}$$

又此流體 $\nabla^2 \varphi = 0$ ，亦即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ ，試求當 $0 < x < \infty$ 、 $0 < y < b$ 時， $\varphi = ?$



《圖 6-27》

因為 φ 是 x 和 y 的函數，所以我們令 $\varphi(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

又因為 $\nabla^2 \varphi = 0$ ，

$$\text{故 } Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (6-15)$$

利用數學中的「分離係數法」(separation of variables)，可將上式改為

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C = k^2 \quad (6-16)$$

↘ 必須同時是 x 和 y 的函數

(註) 為了計算方便，故令上式等於 k^2

其中 $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$ 表示 x 之函數，而 $-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$ 則代表 y 的函數。利用 6.2 節，

我們可依下列步驟求出 $\varphi(x,y)$ 。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 \\
 & \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \\
 & \Rightarrow Y = A \cos ky + B \sin ky
 \end{aligned}$$

利用邊界條件：

$$\square \varphi(x, 0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\square \varphi(x, b) = 0 \Rightarrow B \sin kb = 0$$

$$(i) \quad B = 0 \Rightarrow \text{trivial solution}$$

$$(ii) \quad \sin b = 0 \Rightarrow kb = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{b}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \\
 & \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \\
 & \because k = \frac{n\pi}{b} \\
 & \therefore \frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X = C \cdot e^{-\frac{n\pi}{b}x} + D \cdot e^{\frac{n\pi}{b}x}$$

利用邊界條件： $\varphi(\infty, y) = X(x = \infty) = \text{finite} \Rightarrow D = 0$

$$\text{故由 (1) (2) 可得 } \varphi_n(x, y) = C_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum C_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)x} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

又邊界條件 $\varphi(0, y) = \varphi$

$$\text{故 } \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

利用 $\int_0^b \left(\sin \frac{m\pi y}{b}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b}\right) dy$ 可求出 C_n

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b \left(C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy = \int_0^b \varphi \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy = \varphi \int_0^b \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy$$

□若 $m=n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \varphi \int_0^b \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy$$

$$\because \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b \frac{1 - \cos 2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{2} dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\int_0^b \frac{dy}{2} - \int_0^b \frac{\cos 2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{2} dy \right] = \varphi \int_0^b \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy$$

$$\text{又} \because \int_0^b \sin \frac{(2n)\pi y}{b} dy = 0$$

$$\therefore \frac{C_n \cdot b}{2} = \begin{cases} \frac{2b\varphi}{n\pi} & n = \text{odd}(\text{奇數}) \\ 0 & n = \text{even}(\text{偶數}) \end{cases}$$

□若 $m \neq n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy = \varphi \int_0^b \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy$$

$$\because \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b \left(\sin \frac{(n+m)\pi y}{2b} + \cos \frac{(n-m)\pi y}{2b} \right) dy = \varphi \int_0^b \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dy$$

故 $C_n = 0$

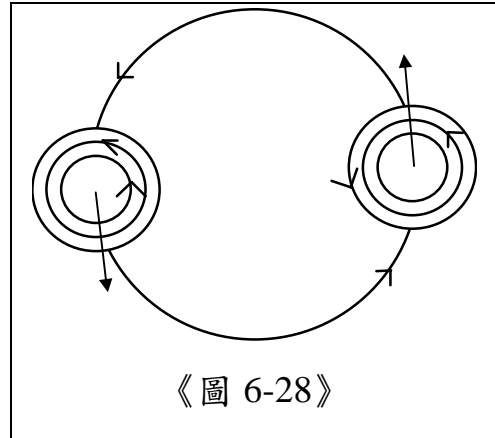
$$\text{由} \square、\square \text{ 可得 } C_n = \begin{cases} \frac{4\varphi}{n\pi} & n = \text{odd} \\ 0 & n = \text{even} \end{cases}$$

$$\text{所以 } \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$= \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

§6.8 Fujiwhara effect (藤原效應)

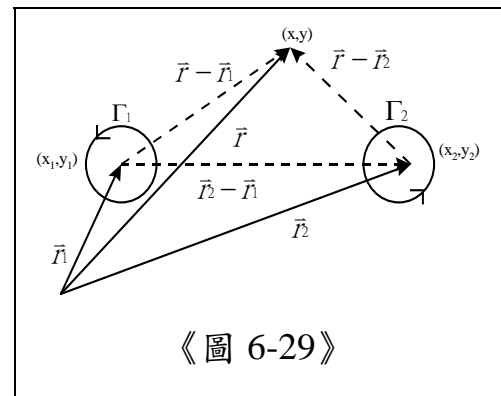
在前面幾節中，我們曾經提到過 free vortex 的情形。現在我們就來看看當兩個 free vortex 相遇時，會發生什麼狀況。



《圖 6-28》

在 1927 年時，Fujiwhara effect 被正式發現。其現象是因為兩個 free vortex 會相互影響，而產生似雙子星互繞的情況如《圖 6-28》。下面我們就

利用方程式的運算，來探討 Fujiwhara effect。



《圖 6-29》

Question：分別位在南、北半球的雙颱風所造成的效應會如何？

《圖 6-29》是兩個 free vortex 間作用的示意圖。我們就利用圖上所示的關係來探討 Fujiwhara effect：

$$\psi(\vec{r}) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{-\Gamma_1}{4\pi} \ln(\vec{r} - \vec{r}_1)^2 + \frac{-\Gamma_2}{4\pi} \ln(\vec{r} - \vec{r}_2)^2$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = (x - x_2)\vec{i} + (y - y_2)\vec{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{u} = (u, v) = -\vec{k} \times \nabla \psi$$

\vec{r}_1 點的運動情形：

$$\begin{aligned} (\vec{u})_{\vec{r}=\vec{r}_1} &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\vec{r}=\vec{r}_1} = -(\vec{k} \times \nabla \psi_2)_{\vec{r}=\vec{r}_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \left[\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_2)}{(\vec{r} - \vec{r}_2)^2} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_1} \\ &= \frac{\Gamma_2}{2\pi} \left[\frac{\vec{k} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} \right] \quad (6-17) \end{aligned}$$

\vec{r}_2 點的運動情形：

$$\begin{aligned} (\vec{u})_{\vec{r}=\vec{r}_2} &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\vec{r}=\vec{r}_2} = -(\vec{k} \times \nabla \psi_1)_{\vec{r}=\vec{r}_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left[\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{(\vec{r} - \vec{r}_1)^2} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_2} \\ &= \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left[\frac{\vec{k} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \right] \quad (6-18) \end{aligned}$$

$$\text{Def: } \vec{r}_{12}^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

我們將式(6-17)和(6-18)相減可得：

$$\frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{k} \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi \vec{r}_{12}^2} \quad (6-19)$$

rate of change $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \perp (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (6-19) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}{2} \right] = 0$$

∴ the distance between two vortices remains invariant

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \text{ 又令 } X_{21} = X_2 - X_1, Y_{21} = Y_2 - Y_1$$

$$\frac{d}{dt} X_{21} = -\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)Y_{21}}{2\pi \vec{r}_{21}^2} \quad (6-20)$$

$$\frac{d}{dt} Y_{21} = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2) X_{21}}{2\pi \bar{r}_{21}^2} \quad (6-21)$$

$$\frac{d}{dt} (6-20) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} X_{21} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi \bar{r}_{21}^2} \left(\frac{dY_{21}}{dt} \right) \quad (6-22)$$

其中 $\left(\frac{dY_{21}}{dt} \right)$ 以(6-21)代入

$$(6-22) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} X_{21} = -\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi \bar{r}_{21}^2} \right)^2 X_{21} \quad (6-23)$$

同理

$$\frac{d^2}{dt^2} Y_{21} = -\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi \bar{r}_{21}^2} \right)^2 Y_{21}$$

(如波動方程一般)

$$X_{21} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \text{frequency} : \omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi \bar{r}_{21}^2}$$

既然已經知道了兩個 free vortex 的大小是否可以找出旋轉的中心

呢？利用式(6-17)與(6-18)：

$$\Gamma_1 \times (6-17) + \Gamma_2 \times (6-18) \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Gamma_1 \bar{r}_1 + \Gamma_2 \bar{r}_2) = 0$$

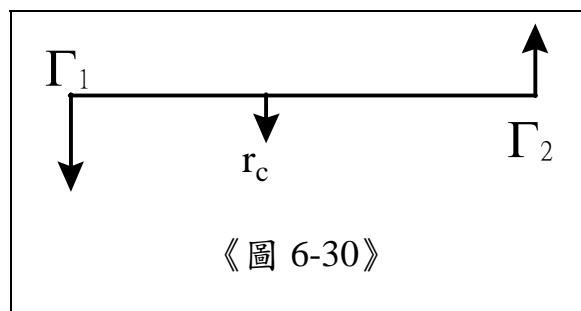
$$\text{Def : } \bar{r}_c = \frac{\Gamma_1 \bar{r}_1 + \Gamma_2 \bar{r}_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

= fixed Γ_1

and Γ_2 rotates

around \bar{r}_c 以 ω 角速

率互轉



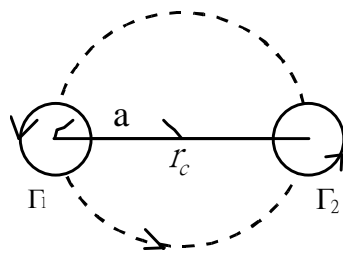
《圖 6-30》

$\Rightarrow a : b = \Gamma_1 : \Gamma_2$ ，如《圖 6-30》所示。

在對藤原效應作了基本描述之後，接下來我們要討論的是 Γ_1 、 Γ_2 的大小、正負關係如何影響兩環流間的運動情形。

1. $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma > 0$

Two vortices go around counter-clockwise in a circle



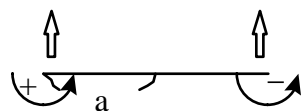
《圖 6-31》

□ 互轉的頻率 $\omega = \frac{2\Gamma}{2\pi \cdot r_{21}^2}$

□ $|\vec{u}_1| = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot (2a)}$

2. $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma > 0$

Two vortices go straight toward north



《圖 6-32》

□ $\omega = \frac{\Gamma - \Gamma}{2\pi \cdot r_{21}^2} = 0$

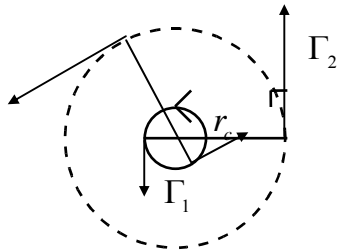
$$\square \vec{r}_c = \frac{\Gamma_1 \vec{r}_1 + \Gamma_2 \vec{r}_2}{\Gamma - \Gamma} \rightarrow \infty \quad (\text{相當於直線運動})$$

$$\square v_0 = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2a}$$

(可對照 6.6 節中，free vortex 靠近邊界時的現象)

3. $\Gamma_2 > \Gamma_1 > 0$

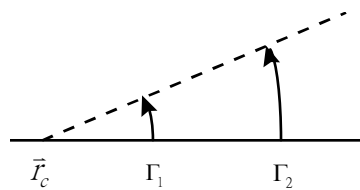
兩渦旋除各式各樣自以逆時針方向旋轉外，並且繞一共同質心（位於兩者之間）以逆時針方向旋轉



《圖 6-33》

4. $\Gamma_2 < 0, \Gamma_1 > 0, \Gamma_1 > -\Gamma_2 > 0$

兩渦旋繞一共同質心以逆時針方向旋轉，但質心不在兩者之間



《圖 6-34》

在前述 $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma > 0$ 情況中，因採用的是 Eulerian 的觀點，故觀察到為兩個渦旋以相同的速度 v_0 直向往北移動；但現在若改採 Lagrangian 的觀點時（觀察者以 v_0 的速度跟著兩個渦旋移動），則此時所看到的現象就像有一均勻流場，以 v_0 的速度向南移動，疊加在流場上一樣。這時流場的 stream function (Ψ) 為

$$\Psi = \frac{-\Gamma}{4\pi} \ln[(x+a)^2 + y^2] + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2] + \frac{\Gamma x}{4\pi a}$$

$$\Rightarrow \Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{x}{a} - \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{相當於 } v_{0x}, \end{array} \right.$$

其中 $\begin{cases} r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 \\ r_2^2 = (x-a)^2 + y^2 \end{cases}$

再者

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{4\pi a} + \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

若 $x \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow v = \frac{-\Gamma}{4\pi a}$$

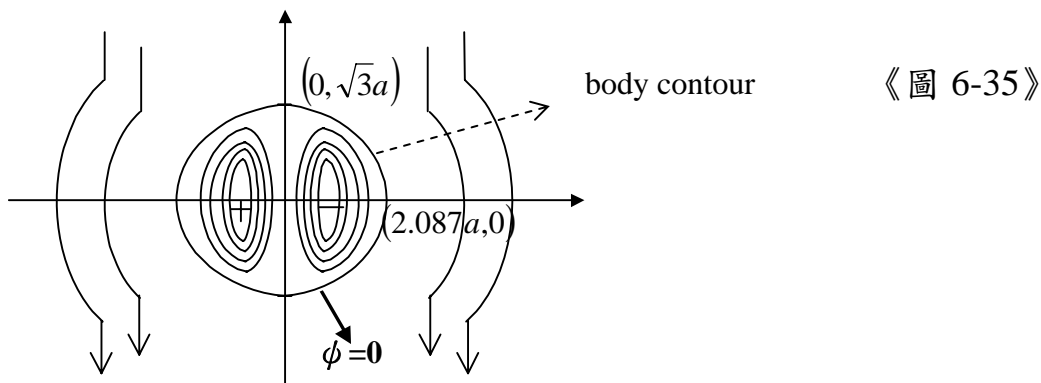
若 $x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow v = -\frac{\Gamma}{4\pi a} + \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{4a}{a^2 + y^2} \right) \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3}a$$

所以 $(0, \pm\sqrt{3}a)$ 為兩停滯點所在。同理，也可使得 $u(a, \pm\sqrt{3}a) = 0$ ，因此

$(a, \pm\sqrt{3}a)$ 為此一橢圓輪廓的左右頂點，而在此兩點的水平速度 $u=0$ 。



$$\text{at } (x, y) = (0, \sqrt{3}a) \quad \psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{6}{a} - \ln 1 \right) = 0$$

$$\text{let } y=0 \quad \psi_0 = 0 = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{x}{a} - \ln \frac{(x+a)^2}{(x-a)^2} \right) \rightarrow x \approx 2.087a$$

Note :

Inside the packet of ($\varphi=0$), all fluid is trapped; outside of the packet is not trapped and disturbed as the system goes by. But the packet does not move with the flow.