Chap. 5 守恆定律(The conservation laws)

§5.1　Reynolds's transport theorem

在第三章中，我們曾經討論過了流場的變化。現在我們再利用此一方法來說明 Reynolds's transport theorem 的內容。

我們在前面已經推出的公式 $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho b dV + \oiint_{c.s.} b\left(\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}\right)$，現在我們將 B 定義如下：

$$B = \iiint \rho b dV \quad , \quad F\left(\vec{x}, t\right) = \rho b \quad \text{, i.e. } B = \iiint F dV$$

$$\underline{\Rightarrow \frac{d}{dt}\iiint F dV = \iiint_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \oiint_A F\vec{v}\cdot d\vec{A}} \rightarrow \textbf{Reynolds's transport theorem (5-1)}$$

又因為 $\oiint F\vec{v}\cdot d\vec{A} = \iiint \nabla\cdot\left(F\vec{v}\right)dV$，所以我們把上式**(5-1)**整理成下面的形式：$\frac{d}{dt}\iiint F dV = \iiint_V \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\cdot\left(F\vec{v}\right)\right]dV$　　**(5-2)**

現在我們把 $F\left(\vec{x}, t\right) = \rho b$ 代入，

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\iiint \rho b dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho b\vec{v}\right)\right]dV$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} b + \rho\frac{\partial b}{\partial t} + b\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right) + \rho\vec{v}\cdot\nabla b\right]dV \qquad \textbf{(5-3)}$$

又依據 continuous equation($b\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right)\right] = 0$)，**(5-3)**可以再整理成下面形式：

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\iiint_V \rho b dV = \iiint_V \frac{db}{dt} dV \qquad \textbf{(5-4)}$$

（※b：intensive）

§5.2　質量守恆 (conservation of mass)

在前一節中，我們曾經討論過 Reynolds's transport theorem。現在我們就利用 Reynolds's transport theorem 來討論**質量守恆**(conservation of mass)。

我們先假設如果質量守恆的話，那表示質量應該不隨時間而改變，所以我們可以寫出下式：

（令 b=1）

$$0=\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint \rho dV=\iiint_{C.V.}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\oiint_{C.S}\rho\vec{v}d\vec{A} \qquad \textbf{(5-5)}$$

，又 $\oiint_{C.S}\rho\vec{v}d\vec{A}=\iiint_{C.V.}\nabla\cdot(\rho\vec{v})dV$

將上式**(5-5)**經過一些整理後，可得 $\iiint\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]dV=0$。由於此式對於任何體積 V 皆成立

$$\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$$ ➔continuous equation

再利用第三章中所提到的 continuum property 概念，我們可得 $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot(\vec{v})=0$ 。因此對於 incompressible fluid：

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt}=0 \qquad \textbf{(5-6)}$$

§5.3 動量守恆 (Conservation of momentum)

§5.3~0 作用力

在討論到動量守恆之前，我們必須先了解影響流體的作用力，對動量的貢獻何在。一般而言，作用力可以分類為 **Body Force** 及 **Surface Force**。本節中我們所要著重的乃是 **Surface Force**，亦即第一章所介紹的 **Normal Stress** 及 **Shear Stress**。為了方便起見，我們將 Surface Force 以下列符號表之：

Stress≡ τ_{ij}

(1) 當 i=j 時，τ_{ij} 表示Normal Stress

(2) 當 i≠j 時，τ_{ij} 表示Shear Stress

(3) $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ (請參照附錄)

(4) 若流體為靜止(For Static Flow)：$\tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{33}=-P$（isotropic）而且表面力需和 body force 平衡。

§5.3~1 Cauchy's equation of motion

在這一個章節中，我們將要利用 Surface Force 對一流體的作用，推導出 Cauchy's equation of motion。

首先來看看 Surface Force 在各方向的作用情形。（請參照附錄）
在 1 方向， Surface Force 可以下式表之

$$\left(\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\tau_{j1}}{\partial x_j}dV$$

$$=\frac{\partial\tau_{j1}}{\partial x_j}dV$$

同理， 2 方向的 Surface Force 可以表示為：

$$\frac{\partial\tau_{j2}}{\partial x_j}dV$$

同理， 3 方向的 Surface Force 可以表示為：

$$\frac{\partial\tau_{j3}}{\partial x_j}dV$$

我們可以將上列的三式，及 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$的觀念，整理而成以下的式子：
The Surface Force in the i Component：

$$\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}=\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}$$ （其中 i 固定，j=1~3）

再從 Newton's Law ，便可推導出 Cauchy's equation of motion

$$\underbrace{\rho\frac{du_i}{dt}}_{(1)}=\underbrace{\rho g_i}_{(2)}+\underbrace{\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}}_{(3)}$$

(1) 單位體積流體之加速度
(2) 單位體積流體所受之重力
(3) 單位體積流體所受之 Surface Force

另外，我們也可以利用 5.1 介紹的 Reynold's transport thm.推導出 Cauchy's equation of motion：

令$b=u_i$

$$\frac{d}{dt}\iiint_V\rho u_i dV=\iiint_V\rho\frac{du_i}{dt}dV=\iiint_V\rho g_i dV+\oint\!\!\oint_A\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}dA_j$$

$$\because\oint\!\!\oint_A\tau_{ij}dA_j=\iiint\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}dV$$

$$\xrightarrow{\text{亦可推導出}}\rho\frac{du_i}{dt}=\rho g_i+\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}$$

§5.3~2 Constitutive eq. for Newtonian Fluid

本節要更進一步的利用 Surface Force 作用於流體的觀念，推導出數個數學方程以描述流體的動力狀態。讓我們分為靜止的(at rest)流體與非靜止的(not at rest)流體兩部分來討論。首先來看看靜止的流體：

靜止的流體可以想見的是沒有任何的切應力作用於該流體。(回憶第一章對流體的定義,流體一受切應力即會發生形變,使之無法保持靜止。)其 Surface Force 可以矩陣的形式表示如下：

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

我們對這樣形式的 Surface Force 稱之為「等向張量」(isotropic tensor)。所謂的「等向」(isotropic)，是指所有的組成分子，值皆不會因為座標系的旋轉而有任何的改變。

接著，讓我們定義一個 2nd-order tensor “kronecker delta: δ_{ij}”

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我們可以得到：

$$\tau_{ij} = -P\,\delta_{ij}$$

【i、j 可對調；其中 P 為 thermodynamic pressure：P=P(ρ,T)】

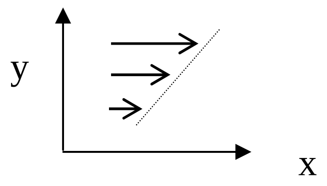
接下來討論非靜止的流體(fluid not at rest)的情形，也就是要考慮到流體受切應力作用的情況了。

對一個受到切應力的流體，我們可以將其 Surface Force 表示為：

a moving fluid develops additional component of stress due to viscosity

$\tau_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \sigma_{ij}$ (由 $\tau_{ij} = \tau_{ji} \rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

(σ_{ij}：non-isotropic part→deviatoric stress tensor) 【e.g.】$\tau_{12}=\mu\,\partial u_1/\partial x_2$



《圖 5-1》

Newtonian fluid：

(1)each σ_{ij} is a linear function of $\partial u_i/\partial x_j$ for i，j=1~3

（如 $\sigma_{12}=\mu\,\partial u_1/\partial x_2$）

(2) medium：isotropic

(3) stress→ -P (if $\partial u_i/\partial x_j=0$，即靜止流體)

根據(1)，我們發現 $\sigma_{ij}\propto$ velocity gradient，接下來將 $\partial u_i/\partial x_j$ 拆成對稱(symmetric)和非對稱(anti-symmetric)兩部分，（對稱部分使流體產生形變，非對稱部分使流體產生旋轉；而我們發現旋轉並不會影響 σ_{ij}【詳見 PIJUSH K. KUNDU "FLUID MECHANICS" p90】）：

$$\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\underbrace{\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\substack{\text{Symmetric}\\ \text{deformation}}}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\substack{\text{Anti-symmetric}\\ \text{rotation}}}$$

定義rate of strain: e_{ij} 註2

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Assume:

$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}K_{ijmn}\cdot e_{mn}$ (引進K_{ijmn}乃是一個四階張量)

根據(2)；以及 Tensor analysis: isotropic, even order(Aris,1962)

$\Rightarrow K_{ijmn}=\lambda\,\delta_{ij}\delta_{mn}+\mu\,\delta_{im}\delta_{jn}+\gamma\,\delta_{in}\delta_{jm}$

∵對稱

又$K_{jimn}=\lambda\,\delta_{ji}\delta_{mn}+\mu\,\delta_{jm}\delta_{in}+\gamma\,\delta_{jn}\delta_{im}$

∵ $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$

$\Rightarrow K_{ijmn}=K_{jimn}$

$\Rightarrow(\mu-\gamma)\delta_{im}\delta_{jn}=(\gamma-\mu)\delta_{jn}\delta_{im}$

$\Rightarrow\mu=\gamma$

$$\therefore \sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\left(\underbrace{\lambda\,\delta_{ij}\delta_{mn}}_{m=n}+\underbrace{\mu\,\delta_{im}\delta_{jn}}_{m=i;\ n=j}+\underbrace{\gamma\,\delta_{in}\delta_{jm}}_{n=i;\ m=j}\right)e_{mn}$$

時才有值

$$=(\lambda\,\delta_{ij}\delta_{mm}e_{mm})+\mu\,e_{ij}+\mu\,e_{ji}$$

$$\therefore \sigma_{ij}=\lambda\,\delta_{ij}\sum_{m=1}^{3}e_{mm}+2\mu\,e_{ij}$$

又

$$\sum e_{mm}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij}=-P\delta_{ij}+\lambda\,\delta_{ij}\nabla\vec{u}+2\mu\,e_{ij}$$

令 i=j

$$\Rightarrow \tau_{ii}=-3P+(2\mu+3\lambda)\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow P=-\frac{1}{3}\tau_{ii}+(\frac{2}{3}\mu+\lambda)\nabla\cdot\vec{u}$$

令$\overline{P}=-\frac{1}{3}\tau_{ii}\Rightarrow P=\overline{P}+\left(\frac{2}{3}\mu+\lambda\right)\nabla\cdot\vec{u}$

若$\nabla\cdot\vec{u}=0$

$$\Rightarrow P=\overline{P}$$

其中$\overline{P}:mean\quad pressure$

τ_{ii} = Trace = constant for any rotation of coordinates定義：$\kappa=2\mu/3+\lambda\rightarrow$coeff. of bulk viscosity (Truesdell，1952)

由 Stoke’s assumption：$\kappa=0\Rightarrow\lambda=-\frac{2}{3}\mu$

$$\therefore \tau_{ij}=-(P+\frac{2}{3}\mu\cdot\nabla\cdot\vec{u})\delta_{ij}+2\mu\cdot e_{ij}$$

其中 $2\mu\,e_{ij}$ 為dynamic viscosity coeff.

接著推導出 Navier Stoke’s eq.

$$\rho\frac{du_i}{dt}=\rho g_i+\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$=\rho g_i-\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu e_{ij}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{u})\delta_{ij})$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i+2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}-\frac{2\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\vec{u})$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i+\mu\nabla^2u_i+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot\vec{u})$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d\vec{u}}{dt}=-\nabla P+\rho\vec{g}+\underbrace{\mu\nabla^2\vec{u}}_{(1)}+\underbrace{\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{u})}_{(2)}$$

(1) 物理上類似擴散作用(diffusion)，請舉擴散作用實例？
(2) 通常值較小
註：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu e_{ij}\right)\\
&=\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\
&=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\
&=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\\
&=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla\cdot\bar{u}\right)
\end{aligned}
$$

※Navier Stoke's equation：

單位體積：

$$\rho\frac{d\bar{u}}{dt}=\nabla P+\rho\bar{g}+\mu\nabla^2\bar{u}+\frac{\mu}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\bar{u}\right)$$

單位質量：

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{1}{\rho}\nabla P+\bar{g}+\nu\nabla^2\bar{u}+\frac{\nu}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\bar{u}\right)$$

其中 $\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$ kinematic viscosity coeff..(ν 之單位為 m^2s^{-1})

liquid：μ 隨溫度上升而變小

gas：μ 隨溫度上升而變大

For incompressible fluid

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{V}=0$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d\bar{u}}{dt}=-\nabla p+\rho\bar{g}+\mu\nabla^2\bar{u}$$

§5.4 Bernoulli's Equation

沿著氣流線的 Bernoulli's equation，在不考慮摩擦的情況下，可由 Euler's equation 積分而得。其過程如下：

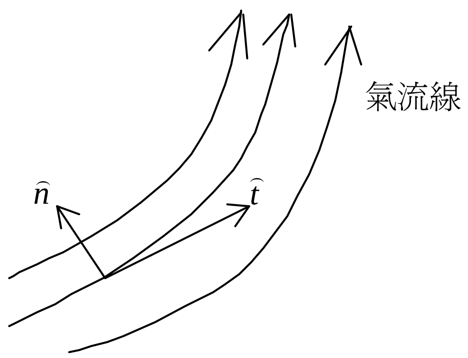
Euler's eq.：$-\dfrac{\nabla p}{\rho}-g\vec{k}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}$ ，$\dfrac{d\bar{v}}{dt}$ 為加速度。

由第三章所得之結果：$\frac{dB}{dt}=\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)B$

則 $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ ，其中 $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ 為平流作用。

故 Euler's eq.可改寫為：$-\frac{\nabla p}{\rho}-g\vec{k}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$

因為，欲求得沿著氣流線的 Bernoulli's equation，故令 $\vec{v}=v\vec{t}$
在此，$\hat{t}$ 表示該點沿氣流線方向的單位向量，如圖 5-2



《圖 5-2》

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}=\frac{\partial}{\partial s}\hat{t}+\frac{\partial}{\partial n}\hat{n}$$

則 $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v\vec{t}\cdot\nabla\vec{v}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}$

(註)$\left(\vec{i}\cdot\nabla\right)=\frac{\partial}{\partial x}$

其中，s 為沿氣流線方向移動之一小段距離。

至此，Euler's eq.可表示為 $-\frac{\nabla p}{\rho}-g\vec{k}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}$

$\Rightarrow\left[-\frac{\nabla p}{\rho}-g\vec{k}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}\right]\cdot d\vec{s}$ ，$\vec{s}=s\vec{t}$ 　表示沿著氣流線方向

$\because\nabla z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial z}\vec{k}\right)=\vec{k}$

$\therefore$上式可寫成$\left[-\frac{\nabla p}{\rho}-g\nabla z=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}\right]\cdot d\vec{s}$

又$\because d\vec{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$

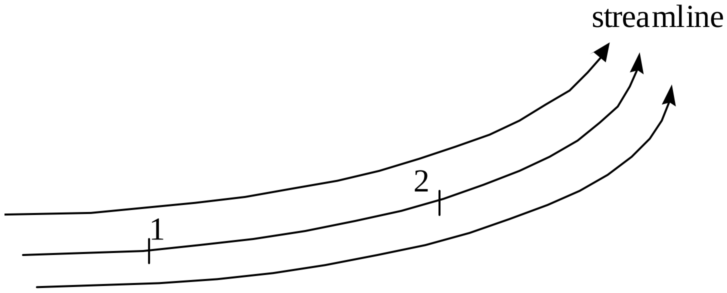
$\therefore\nabla p\cdot ds=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$,

$\nabla z\cdot d\vec{s}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial z}dz=dz$

故 $-\dfrac{dp}{\rho}-gdz=\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot d\vec{s}+vdv$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{\rho}-gdz-d\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\frac{\partial v\hat{t}}{\partial t}\cdot ds\hat{t}=\frac{\partial v}{\partial t}ds \qquad \textbf{(5-7)}$$

其中 $\vec{v}=v\vec{t}$ ，$\vec{s}=s\vec{t}$



《圖 5-3》

《圖 5-3》表示流場中之一條氣流線，若沿著氣流線由位置 1 對**(5-7)**式積分至位置 2：

即 $\int_1^2\left[-\dfrac{dp}{\rho}-gdz-d\left(\dfrac{v^2}{2}\right)=\dfrac{\partial v}{\partial t}ds\right]$

$$\Rightarrow \int_1^2\frac{dp}{\rho}+\int_1^2 gdz+\int_1^2 d\left(\frac{v^2}{2}\right)+\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}ds=\mathrm{B}(t)$$

在此，B(t)為任意之"時間的函數"，就稱為 Bernulli function。

因為位置 1 和位置 2 是任意的，所以可將上式改寫如下：

$$\int_0^p\frac{dp}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}+\int_0^s\frac{\partial v}{\partial t}ds=\mathrm{B}(t) \qquad \textbf{(5-8)}$$

這個方程式滿足於無摩擦、可壓縮且不穩定的流體。對於這個方程式，亦可解釋如下：在非穩定流場、任何時間內，左邊四項的和與氣流線上任一點 Bernoulli function 的值相同。然而，Bernoulli function 在不同的氣流線上是不相同的。同樣的，在一特定的氣流線上，其 Bernoulli function 會隨著時間而改變。但是，若流體是穩定(steady)的，則"時間"這個變因將會消失；那麼，**(5-8)**式可簡化為：

$$\int_0^p\frac{dp}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}=\mathrm{B} \qquad \textbf{(5-9)}$$

通常，這個 Bernoulli constant(B)在固定的氣流線是不變的，它只會隨著氣流線的不同而改變。**(5-9)**式通常稱為 Bernoulli's equation for steady compressible flow。

若此流體是穩定(steady)、不可壓縮(incompressible)且密度(ρ)為常數，則 Bernoulli's equation 可表示如下：

$$\underline{\frac{dp}{\rho}} + \underline{gz} + \underline{\frac{V^2}{2}} = \mathrm{B} \qquad \textbf{(5-10)}$$

□　□　□

□：單位質量流體所作的功。

□：單位質量流體所具有之位能。

□：單位質量流體所具有之動能。

(5-10)式表示在無摩擦、不可壓縮的穩定流場中，沿著一氣流線，單位質量流體所作之功和單位質量流體所具之位能及動能的總和。所以，我們也可將無摩擦、不可壓縮的穩定流場中，一氣流線上任意兩點之 Bernoulli’s equation 表示成：

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^{\,2}}{2} \qquad \textbf{(5-11)}$$

§5.5　Mechanical Energy equation

流體動能的方程式，乃經由動量方程式及速度向量式推導而得，所以它並不是一個獨立分離的定律；但是如果和熱力學第一定律比較的話，則兩者之間卻又不盡相同。因此，本節的主要目的便是針對動能方程作一連串的推導與探討。

由 5.3 節已知 Cauchy’s eq. of motion：$\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$，若將方程式兩端皆乘以 u_i，則可以得到

（為方便起見，**5-12~5-14** 式均省略$\sum_{j=1}^{3}$　）

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u_i^{\,2}}{2}\right) = \rho u_i g_i + u_i \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \textbf{(5-12)}$$

其中$\left(\frac{u_i^{\,2}}{2}\right)$：單位質量具有的動能

$\rho u_i g_i$：單位體積重力所作的功

同樣地，將連續方程兩端皆乘以$\frac{1}{2}u_i^{\,2}$，則

$$\frac{1}{2}u_i^{\,2}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)\right] = 0 \qquad \textbf{(5-13)}$$

將**(5-12)**與**(5-13)**式相加，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^{\,2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \cdot \frac{1}{2}\rho u_i^{\,2}\right) = \rho u_i g_i + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \textbf{(5-14)}$$

註：

5-12 式可利用平流概念展開如下

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\rho\vec{u}\cdot\nabla\left(\frac{u_i^2}{2}\right)$$

$$=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\rho\left(u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_3\vec{e}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)\right)$$

$$=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\rho u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\rho u_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\rho u_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)$$

$$=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+\sum_{j=1}^{3}\rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)$$

定義 $E=\frac{1}{2}\rho u_i{}^2$，$u_i^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$，表示每單位質量所具有的動能，則可以將上式改寫成

$$\frac{\partial}{\partial t}E+\nabla\cdot\left(\vec{u}E\right)=\rho\vec{u}\cdot\vec{g}+\vec{u}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{\tau}\right)\qquad \textbf{(5-15)}$$

$\vec{u}E$ ：kinetic energy flux

上式即為動能通量 $\vec{u}E$ 的**輻散形式(flux divergence terms)**，亦稱為 **transport terms**；此方程式通常出現在能量的平衡關係中，以及用來解釋通過某一點的通量淨值。再者，將**(5-15)**式對空間積分可得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V EdV+\iiint_V\nabla\cdot\left(\vec{u}E\right)dV=\iiint_V\rho\vec{u}\cdot\vec{g}dV+\iiint_V\vec{u}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{\tau}\right)dV$$

根據 Divergence theorem

$$\iiint_V\nabla\cdot\left(\vec{u}E\right)dV=\oint\!\!\oint_A\left(\vec{u}E\right)\cdot d\vec{A}\left[=0, if\left(\vec{u}E\right)_{boundary}=0\right]$$

因此，動能通量 $\vec{u}E$ 在邊界的作用影響整個區域的總動能，但內部之 $\vec{u}E$ 並不影響整個區域的總 E。(物理原因為何？)

接下來，我們要討論 deformation work 和 viscous dissipation 的關係。首先，將表面力所作的功分為

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\cdot\tau_{ij}\right)}_{□}=\underbrace{\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{□}+\underbrace{u_i\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}}_{□}$$

□the total work done by surface force

□deformation work(用來改變內能)

stress 造成的功，但不改變動能

□increase of kinetic energy

the net force accelerates the local fluid and increases its K.E.

造成動能改變

其中我們定義 **Deformation Work(DW)**

$$DW = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$= \tau_{ij}\cdot e_{ij}$$

$$\left(\because \tau_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] = -\tau_{ji}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]\right)$$

並且由前一節已經知道$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{u})\delta_{ij}$ ，則

$$DW = -P(\nabla\cdot\vec{u}) + \phi$$

與摩擦有關

其中$\phi = 2\mu e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{u})^2$

$$= 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{u})\delta_{ij}\right)^2$$

恆大於或等於零

(semi-positive definite)

利用這些結果，我們可以將(5-12)式改寫成

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{u_i^{\,2}}{2}\right) = \rho u_i g_i + u_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$= \rho u_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ij}) - \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u_i^{\,2}\right) = \underbrace{\rho\vec{g}\cdot\vec{u}}_{①} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ij})}_{②} + \underbrace{P(\nabla\cdot\vec{u})}_{③} - \underbrace{\phi}_{④} \qquad \textbf{(5-16)}$$

① the work done by body force

② the total work done by $\vec{\tau}$

③ the work done by volume expansion

④ viscous dissipation

若定義$\pi = gz$ ，則**(5-16)**式又可以寫成

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u_i^{\,2} + \pi\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ij}) + P(\nabla\cdot\vec{u}) - \phi$$

藉由上述所導證出的各種結果，我們可以將**(5-14)**式對一固定體積積分並且整理成一能量方程式如下

$$\iiint\left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\cdot E) = \rho\vec{g}\cdot\vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ij}) + P(\nabla\cdot\vec{u}) - \phi\right]\cdot dV$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\oiiint EdV}_{□}+\underbrace{\oiint \bar{u}\cdot E\cdot d\bar{A}}_{□}=\underbrace{\oiiint \rho\bar{g}\cdot\bar{u}dV}_{□}+\underbrace{\oiint u_i\tau_{ij}d\bar{A}}_{□}+\underbrace{\oiiint P(\nabla\cdot\bar{u})dV}_{□}-\underbrace{\oiiint \phi dV}_{□}$$

□ change of kinetic energy
□ the energy outflow across the boundary
□ the work done by body force
□ the total work done by surface force
□ the work done by volume expansion
□ viscous dissipation

§5.6 First Law of Thermodynamics(熱力學第一定律)

熱力學第一定律的內容為：系統能量的淨變化恆等於以“熱”或“功”形式通過系統邊界的淨傳送能量。其以方程式表示如下：

$$\Delta U=\Delta Q-dW$$

其中 U 為內能；Q 為熱能；W 為對外所作的功。

在討論流體的溫度變化時,我們以熱力學第一定律作為出發。令 $\bar{q}$ 為 heat flux vector per unit area(單位面積的熱通量)，e 為 internal energy per unit mass(單位質量的內能)；對於一理想氣體來說，$e=C_V T$；在此，C_V 為定容比熱，空氣的 C_V 約為 717 $Joule/kg\cdot{}^0K$。而 $\left(e+\frac{u_i^2}{2}\right)$ 為 stored energy per unit mass。故熱力學第一定律則可表示為：

$$\frac{d}{dt}\oiiint \rho\left(e+\frac{1}{2}u_i^2\right)dV=\oiiint \rho g_i u_i dV+\oiint \tau_{ij}u_i dA_j-\underbrace{\oiint q_i dA_i}_{□} \qquad \textbf{(5-17)}$$

□：heat outflow

要注意的是，若位能不在上式左邊時，body force 所作的功就必須被包含在上式右邊。

$$\oiiint \rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{1}{2}u_i^2\right)dV=\oiiint \rho g_i u_i dV+\oiiint \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ij})dV-\oiiint \frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{1}{2}u_i^2\right)=\rho g_i u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}u_i)-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \qquad \textbf{(5-18)}$$

(5-18)式表示 First law of thermodynamics in the differential form，它同時包含了機械能與熱能。若將 mechanical energy equation 由(5-18)式減去，則可得到 thermal energy equation，其表示如下：

$$\rho\frac{de}{dt}=-\nabla\cdot\bar{q}-p(\nabla\cdot\bar{u})+\phi \qquad \textbf{(5-19)}$$

物理意義：摩擦生熱，即摩擦所損失的動能轉為熱能。

此式亦可稱為 heat equation，其表示因熱能保守、體積壓縮，而內能增加。

§5.7 Boussinesq approximation

因流體必須滿足某些條件，Boussinesq 在西元 1903 年提出忽略流體密度變化的論點；但除了在重力系統中，密度會隨著重力而增加之外。另外，在此概算中將流體之性質視為常數。

Continuity Equation：

Boussinesq approximation 將 continuity equation $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot\bar{u}=0$ 以不可壓縮的形式 $\nabla\cdot\bar{u}=0$ 取代。但這並不表示密度(ρ)在運動的方向上是常數，簡單的說，是 $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ 的量值與 $\nabla\cdot\bar{u}$ 的量值相比，小了許多。

Momentum Equation：

因為 incompressible continuity equation，所以運動的方程式可寫為 $\rho\frac{d\bar{u}}{dt}=-\nabla p+\rho\bar{g}+\mu\nabla^2\bar{u}$ 同樣的，我們忽略了密度的變化量，視ρ為定值（$\rho\to\rho_0$）；但在考慮重力作用時不能忽略密度變化(Why？)，即：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\nabla^2 u\\[2mm] \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P}{\partial y}+\nu\nabla^2 v\\[2mm] \dfrac{dw}{dt}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\rho}{\rho_0}g+\nu\nabla^2 w\end{cases}$$

Heat Equation：

thermal energy equation**:** $\rho\frac{de}{dt}=-\nabla\cdot\bar{q}-p(\nabla\cdot\bar{u})+\phi$ **(5-21)**

雖然由 continuity equation 得到 $\nabla\cdot\bar{u}=0$，但很重要的一點是“volume expansion”這一項[$p(\nabla\cdot\bar{u})$]，與其它幾項相比，是不可忽略的。因此，

我們得到 $-p(\nabla\cdot\bar{u})=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\approx\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_P\frac{dT}{dt}=-p\alpha\frac{dT}{dt}$ **(5-21)**

假設此為理想氣體，由狀態方程可知 $\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{T}\\[2mm] -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P=\dfrac{1}{T}\end{cases}$

$$\begin{cases} p = \rho RT \\ C_p - C_v = R \\ \alpha = \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

由以上三式，(5-21)式可變成$\Rightarrow -p\nabla\cdot\vec{u} = -\rho RT\alpha\dfrac{dT}{dt} = -\rho\left(C_p - C_v\right)\dfrac{dT}{dt}$

又$\rho\dfrac{de}{dt} = \rho C_V\dfrac{dT}{dt}$代回（**5-20**）$\Rightarrow \rho C_p\dfrac{dT}{dt} = -\nabla\cdot\vec{q} + \phi$ **(5-22)**

因為φ很小，故可忽略。又由 Fourier's law：$\vec{q} = -k\nabla T$ (物理意義？)，則 heat equation 可表示成

熱傳導係數

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\nabla^2 T \qquad \textbf{(5-23)}$$

其中$\kappa \equiv \dfrac{k}{\rho C_p}$稱為 thermal diffusivity(熱的擴散效率)。