Chap. 4 Vorticity Dynamics

§4.0　前言

在 3.4 節中曾提過在考慮流體中各質點間的相對運動情形時，可以將它分成變形的部分和旋轉的部分。

本章就將針對流體旋轉運動進行探討。

刪除:

§4.1　渦度(Vorticity)

為了能夠對流體的旋轉運動作更適切具體的描述，因此我們定義出一物理量—渦度：$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}$，用來表示空間中流體旋轉的程度與情形

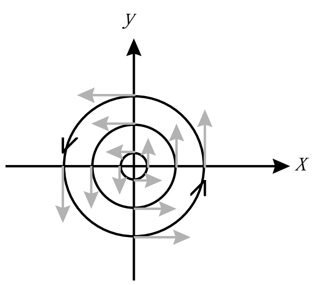
$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}\quad 其中\ \vec{v}=(u,v,w)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\Omega_1\vec{i}+\Omega_2\vec{j}+\Omega_3\vec{k}$$

若 $\dfrac{\partial v}{\partial x}>0$ ， $-\dfrac{\partial u}{\partial y}>0$（即在指向 $\vec{k}$ 方向之分量），則流體的旋轉情形如下圖例所示



《圖 4-1》

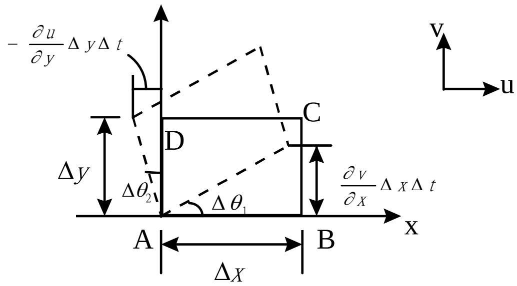
若 $\Omega_3>0$，則流體相對於 z 軸為逆時針方向旋轉；若 $\Omega_3<0$，

則流體相對於 z 軸為順時針方向旋轉；若 $\vec{\Omega}=0$，則此流體稱為**非旋轉流(irrotational flow)**，即每個流體元素皆以不繞著本身的軸旋轉，此軸垂直於流動平面。非旋性流的條件也可以用數學式加以分類。如圖 4-2 所示，在 Δt 時間內，流體元素 ABCD 相對於 A 轉到了新位置(虛線部份)。AB 線對於 Z 軸的角速度 ω_{AB} 為

$$\omega_{AB}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\partial v/\partial x\right)\Delta x\Delta t}{\Delta x\Delta t}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

同樣，AD 線的角速度 ω_{AD} 為

$$\omega_{AD}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$



《圖 4-2》

此兩線角速度之平均值定義為流體元素 ABCD 的旋轉角速度

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\omega_{AB}+\omega_{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

當 $\omega=0$，則符合二維非旋性流的條件為

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

對於三維的流動，非旋性流的條件則必須滿足下列三個方程式

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\qquad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\qquad\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

※小記

(1) If $\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}$ =0 → irrotational flow (potential flow)

(2) If D ≡ $\nabla\cdot\vec{V}$ =0 → non-divergent flow

格式化: 項目符號及編號

格式化

格式化

格式化

渦管線(vortex line)

A line to which vorticity vectors are tangent at all of it’s point ,and satisfies

$$d\vec{r} \times \vec{\Omega} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\Omega_1} = \frac{dy}{\Omega_2} = \frac{dz}{\Omega_3}$$ (Note:streamline: $d\vec{r} \times \vec{v}=0$)

【e.g.】有一剛體以 $\vec{V} = r\omega_0 \vec{\varepsilon}_\theta$ 旋轉，則其渦度

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_r & r\varepsilon_\theta & \varepsilon_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot r\omega_0 & 0 \end{vmatrix}$$ (r，Θ，z)坐標下 curl $\vec{v}$

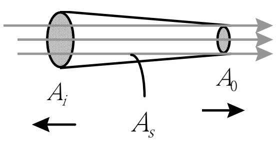
$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\omega_0\right)\right]\vec{\varepsilon}_z = 2\omega_0 \vec{\varepsilon}_z$$

刪除: $= \nabla \cdot \vec{V}$

刪除:

刪除:

定義渦管強度 $S = \iint\limits_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A}$，如圖 4-3，流體流經一管狀體積時



《圖 4-3》 $\because \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})=0$

刪除:

$$\oiint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = \iiint\limits_V \left(\nabla \cdot \vec{\Omega}\right) \cdot dV = \iiint\limits_V \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{V}\right) \cdot dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint \vec{\Omega}_i \cdot d\vec{A}_i + \iint \vec{\Omega}_0 \cdot d\vec{A}_0 + \iint \vec{\Omega}_s \cdot d\vec{A}_s = 0$$

$$\Rightarrow \iint \vec{\Omega}_i \cdot d\vec{A}_i + \iint \vec{\Omega}_0 \cdot d\vec{A}_0 = 0$$ ($d\vec{A} = -d\vec{A}_i = d\vec{A}_0$)

$$\Rightarrow -\Omega_i A_i + \Omega_0 A_0 = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_i A_i = \Omega_0 A_0$$

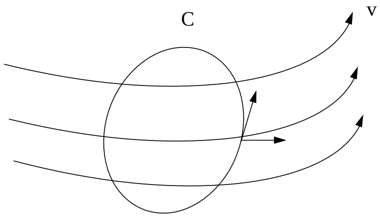
$$\Rightarrow \iint \Omega_i dA_i = \iint \Omega_0 dA_0$$

$$\therefore S = \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = constant$$

即渦管強度為一固定之常數。因此，若流體流經一管狀物時，截面積較小處的流體旋轉程度便比截面積大者來得激烈。

§4.2 環流(circulation)

環流是一個數學的概念：利用切線方向的速度，在一封閉路徑做線積分。考慮一封閉曲線 C，將其置於一流場中，如下圖



《圖 4-4》

以Γ表示環流，其可定義如下

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{L} \qquad (4\text{-}1)$$

若 $\begin{cases} >0 \rightarrow \text{cyclonic circulation} \\ >0 \rightarrow \text{anticyclonic circulation} \end{cases}$ (氣旋式環流，逆時針)（反氣旋式氣旋，順時針）

若 C 是 simply connected，利用 Stoke's theorem→

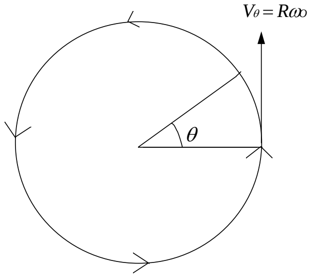
$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{L} = \iint_A \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{A}$，可將 4-1 式改為

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{L} = \iint_A \left(\nabla \times \vec{v}\right) \cdot d\vec{A} \equiv \iint_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A} \qquad (4\text{-}2)$$

(4-2)式中，$(\nabla \times \vec{v})$ 即是渦度 $(\vec{\Omega})$ 的定義，故(4-2)式代表著任意曲面上，邊界環流和渦度的面、線關係。若 $A \rightarrow 0$時，$\vec{\Omega} = \lim_{A \to 0} \frac{\Gamma}{A}$。

【e.g.】試計算一角速度為 ω_0 之二維流場的環流

solution：此流體的氣流線可表示如下圖



《圖 4-5》

利用環流之定義：$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{L}$

可計算出此流體之環流

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} (R\omega_0) R d\theta = R^2 \omega_0 \cdot 2\pi = 2\omega_0 \cdot (\pi R^2)$$

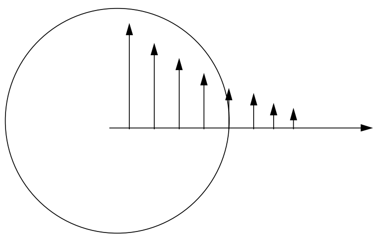
【e.g.】**自由渦旋(Free vortex)**

格式化

自由渦旋的氣流線是同心圓，而其在每點的速度以極座標表示如下

$\vec{v} = \frac{c}{r}\vec{\varepsilon}_\theta$ ，其中 c = const

且在 r=0 時，$v_\theta = \infty$　即有 singular point（奇異點，即沒有物理意義的點。）存在



刪除:

《圖 4-6》

先計算 free vortex 的渦度：

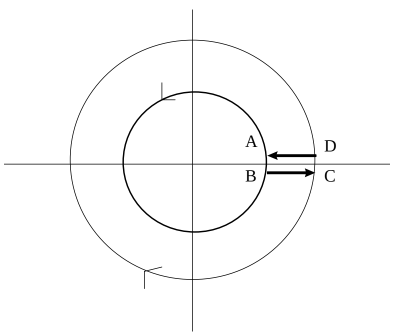
$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{\varepsilon}_r & r(\vec{\varepsilon}_\theta) & \vec{\varepsilon}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & r\left(\dfrac{c}{r}\right) & 0\end{vmatrix}$$ =0，except at r = 0

因為渦度為 0，故可知 free vortex 並不會旋轉

再計算 free vortex 的環流：

$$\Gamma=\oint\vec{v}\cdot d\vec{L}=\int_0^{2\pi}\frac{C}{R}\cdot Rd\theta=2\pi C$$

由此一計算可知，free vortex 的環流只與常數 C 有關。此為包含有 singular point 的環流，若不包含 singular point 的環流又如何呢？我們可將 free vortex 分為四部分來計算，過程及圖形如下：



《圖 4-7》

$$\Gamma=\oint_{c'}\vec{v}\cdot d\vec{L}$$

$$=\int_A^B\vec{v}\cdot d\vec{L}+\int_{B\to C}\vec{v}\cdot d\vec{L}+\int_C^D\vec{v}\cdot d\vec{L}+\int_{D\to A}\vec{v}\cdot d\vec{L}$$

$$\because\int_{B\to C}\vec{v}\cdot d\vec{L}+\int_{D\to A}\vec{v}\cdot d\vec{L}=0$$

$$\Rightarrow\Gamma_{C^{©}}=\oint_{A\to B}\vec{v}\cdot d\vec{L}+\oint_{C\to D}\vec{v}\cdot d\vec{L}$$

又 $\Gamma_{c'}=\iint(\nabla\times\vec{v})d\vec{A}=\iint\vec{\Omega}\cdot d\vec{A}=0$

$$\therefore\oint_{A\to B}\vec{v}\cdot d\vec{L}=\oint_{D\to C}\vec{v}\cdot d\vec{L}\longrightarrow\vec{\Omega}=0$$

刪除: Ω

故在 free vortex 中，在不包含 singular point 的任一封閉路徑，其環流皆相等。

【e.g.】Rankine vortex

刪除: g

此渦旋在θ方向的速度為：

$$v_\theta = \begin{cases} r\omega_0 & r \le R_0 \\ \dfrac{R_0^{\,2}\,\omega_0}{r} & r \ge R_0 \end{cases} \qquad R_0 \text{ 為半徑}$$

□ 當$r \le R_0$時

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_r & r(\vec{\varepsilon}_\theta) & \vec{\varepsilon}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r(r\omega_0) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\omega_0\right)\vec{\varepsilon}_z = 2\omega_0\vec{\varepsilon}_z$$

故當$r \le R_0$時，其渦度與剛體旋轉之渦度相等

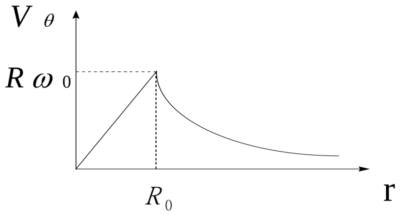
□ 當$r \ge R_0$時

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_r & r(\vec{\varepsilon}_\theta) & \vec{\varepsilon}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\left(\dfrac{R_0^{\,2}\,\omega_0}{r}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

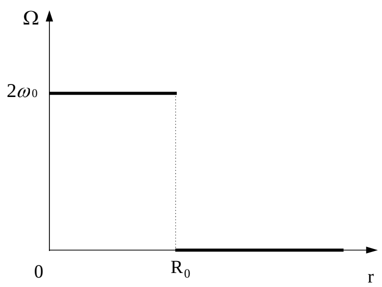
故當$r \ge R_0$時，渦度為 0

則 Rankine vortex 其v_θ與半徑之關係如下圖：

刪除: g



而渦度與半徑的關係則如下所示：



§4.3 Kelvin’s circulation theorem (Thomas’

theorem of invariance of circulation)

在前面一節中，我們已經介紹過環流的概念。但會有環流所發生的情況為何呢？我們便可以藉由 **Kelvin's circulation theorem** 來看環流相對於時間的變化(環流的生成)為何。

刪除: 了

我們先寫出環流的公式 $\Gamma = \oint_c \vec{u}\cdot d\vec{\ell}$，再將等號兩邊分別對時間微分，則

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \frac{d}{dt}\oint_c \vec{u}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot d\vec{\ell} + \oint_c \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}\vec{\ell}$$

此時我們假設流體為 **inviscid flow**，且利用 Euler's eq. $\rightarrow$

刪除: .

$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g\hat{k}$，則

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c\left(-\frac{1}{\rho}\nabla P - \cancel{g\hat{k}}\right)\cdot d\vec{\ell} + \cancel{\oint_c \vec{u}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt}}$$

$$\because \oint_c -g\vec{k}d\vec{l} = \oint_c d(\vec{g}\cdot\vec{l}) = 0$$

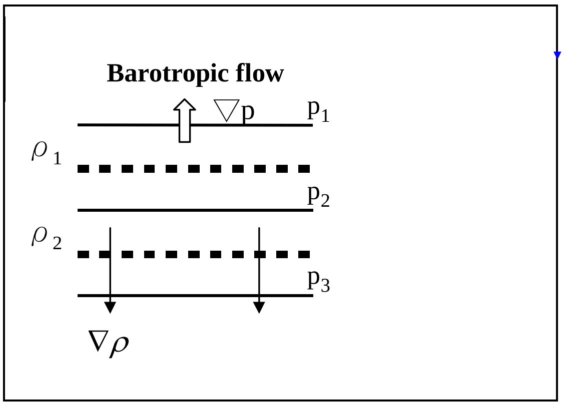
格式化

$$\oint_c \vec{u}d\vec{u} = \oint_c d\frac{\vec{u}^2}{2} = 0$$

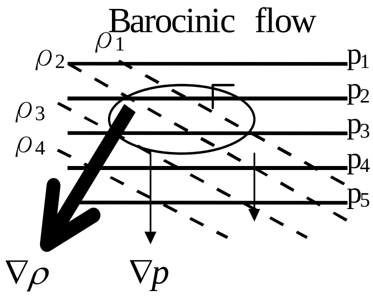
$$\nabla p\cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right)\cdot(dx,dy,dz) = dp$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c -\frac{dP}{\rho} \qquad (4\text{-}5)$$

由上面的過程中我們可以清楚的發現，若流體為 inviscid flow 則環流的形成和壓力 v.s.密度之間有著密切的關係。現在我們用圖形來解釋壓力 v.s.密度之間的關係。如圖 4-6 所示，等壓線與等密度線平行(ρ= ρ〈p〉)，此時並不會有環流的產生，我們稱之為**正壓(Barotropic flow)**；而圖 4-7 中的等壓線與等密度線一但有了交角(ρ≠ρ〈p〉)，環流就會出現，我們稱之為**斜壓(Baroclinic flow)**。



《圖 4-6》

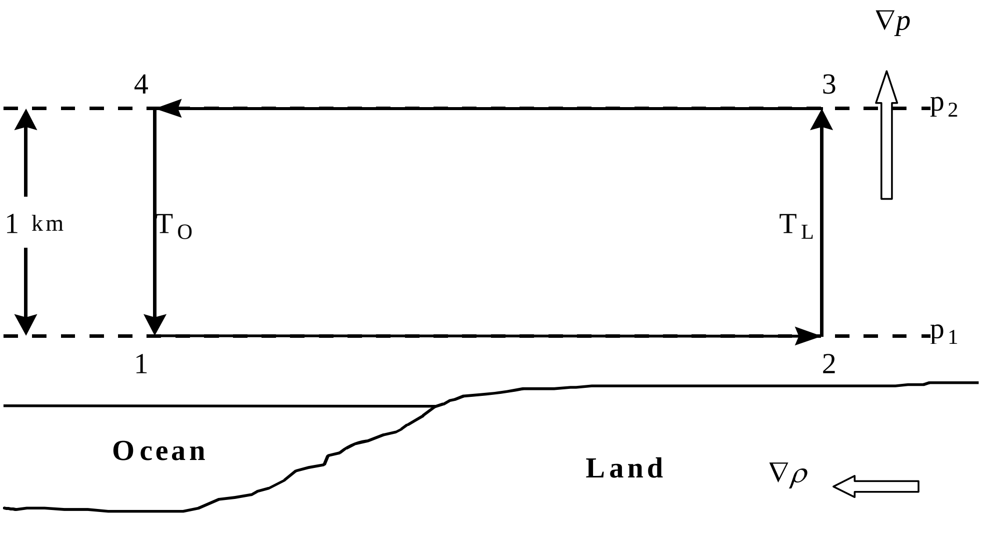


《圖 4-7》

我們在前一節中已經看到了環流的原始定義為 $\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$ 然後我們利用 Stoke's theorem 導出 $\Gamma = \iint_A (\nabla \times \vec{v}) d\vec{A}$ 。根據同樣的道理，在 simply connected 下，我們也可以把 4-5 式利用 Stoke's theorem 改寫成

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint -\frac{\nabla P}{\rho} d\vec{l} = \iint \nabla \times \left(\frac{-\partial P}{\rho} \right) \cdot d\vec{A} = \iint \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} \cdot d\vec{A}$$

我們再來看一下在現實生活中的環流發生的狀況。在大氣中所產生的斜壓情形，就以海陸風是最為普遍的了；下面就是一個海風環流的簡單示意圖



《圖 4-8》

刪除: <sp>

《圖 4-6》

刪除: '

刪除: '

刪除: 裝

上圖中，我們利用 **Kelvin’s circulation theorem** **與理想氣體狀態方程**將可導出海風環流形成的方程式

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c -\frac{dP}{\rho} \quad \textbf{(P=}\rho\textbf{RT；PV=M}^{*}\textbf{RT)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c -\frac{RT}{\rho}dP = \oint_c -RT \cdot d(\ln P) \text{\_\_\_水平壓力變化極小}$$

$$= \int_1^2 -RT\cdot\cancel{d(\ln P)} + \int_2^3 -RT\cdot d(\ln P) + \int_3^4 -RT\cdot\cancel{d(\ln P)} + \int_1^1 -RT\cdot d(\ln P)$$

$$= RT_L \ln\frac{P_1}{P_2} + RT_O \ln\frac{P_2}{P_1} \text{\_(凱氏溫標變化不大)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = R\left(\ln\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\overline{T_L} - \overline{T_0}\right)$$

若依照我們所導出的方程式與所觀測到的溫度、氣壓資料代入所得之結果，我們會發現其結論遠比實際觀測所得的海陸風環流來的大，這是為什麼呢？請大家想一想。