Chap. 2 The physical properties of fluid

§2.0 三大性質

流體具有可壓縮性(compressibility)、黏滯性(Viscosity)、連續性 (continuity)，本章將就這三點特性逐一介紹。

§2.1 流體的壓縮性(The compressibility of fluid)

若液體的密度會因流動的壓力、溫度變化而產生極大的改變，則這種流體運動就必須考慮到其**流體壓縮性(fluid compressibility)**的影響。究竟何謂流體的壓縮性呢? 在物理上我們定義

compressibility：

A measure of the change of volume of a liquid or gas under the action of external force.

所有的流體都可以施以壓力而將其壓縮，但壓縮的程度顯然會因為不同種類，不同狀態的流體而有所不同，為了描述流體可被壓縮的程度，我們定義體積模數(modulus of elasticity)來加以度量。給定一比容(specific volume)為 V_o 的流體，在壓力 P 下，若受到 ΔP 的加壓，則比容會減少 ΔV。因此，可以得到下列的關係式

$$\Delta P = -E \cdot \frac{\Delta V}{V_0}$$

其中ΔP：external force

【e.g.】water

$$\Delta P = 1atm$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{1}{2000}$$

$$E_{water} \approx 10^8 Pascal(\text{不易壓縮})$$

倘若給定一個流場使其速度散度為零，則我們稱這樣的流場為**不可壓縮的流場(Incompressible fluid)**

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \qquad \text{(Chap. 3)}$$

※頭腦體操：

流體的密度是流動的壓力與溫度的函數，依照上述對壓縮性的定義，想一想壓縮性和熱力方程的關係為何?又與理想氣體狀態方程有無關聯?

§2.2　不可壓縮的情況

(The condition of incompressibility)

假設有一體積V_0、密度的流體ρ_0，經過一段時間後，其體積改變了ΔV，密度改變了$\Delta\rho$，則基於質量保守，可得

$$V_0 \cdot \rho_0 = m = (V_0 + \Delta V) \cdot (\rho_0 + \Delta\rho)$$

$$=V_0\rho_0+V_0\Delta\rho+\Delta V\rho_0+\cancel{\Delta V\Delta\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0}=-\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \Delta P=-E\cdot\frac{\Delta V}{V_0}=E\cdot\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

所以我們定義了**不可壓縮性(Incompressibility)**

$$\text{Incompressibility}=\left|\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right|<<1\Rightarrow\frac{\Delta P}{E}<<1 \qquad (2\text{-}1)$$

【e.g.】sound wave

由白努利方程式：$P+\frac{1}{2}\rho v^2=const\Rightarrow\Delta P\approx\tilde{O}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ (2-2)

且 sound velocity：$c^2=\frac{E}{\rho_0}$ (2-3)

order

Why？

若要滿足 incompressibility，則由 2-1 可得

$$\frac{\frac{1}{2}\rho V^2}{\rho_0 c^2}<<1\Rightarrow\frac{V^2}{2c^2}<<1 \qquad (2\text{-}4)$$

定義**馬赫數 M**$=\frac{V}{c}$，則根據(2-4)式，流體的可壓縮性可以被忽略當 $\frac{1}{2}M^2<<1$，由於聲速 c=331+0.6T(m/s)(T：溫度℃)很大，故一般所見的流場皆是為不可壓縮的流場。而在工程上由於其需要則以 M<<0.3 的流場其所能忍受的不可壓縮流場。

※小記:

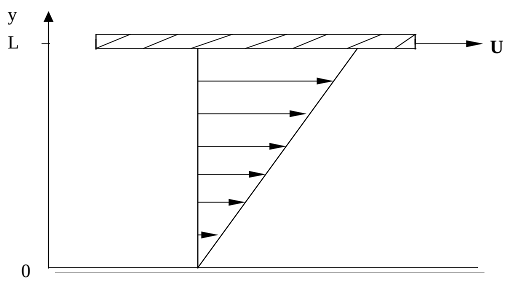
1.不可壓縮無黏滯的流體稱之為理想流體。

2. 可壓縮的流體乃應用於高馬赫數如航空工業等。

§2.3　黏滯性(Viscosity)

在我們學習流體的摩擦和流體的擾動的領域中，流體的黏滯性是一項重要的數量；它產生於兩個相對運動的流體分子之間。流體的黏滯性是度量上下兩層流體間相對滑動所造成的摩擦力大小。我們可由下面這個簡單的模型來推得流體黏滯性在定量上的定義。如圖 2-1，在一個充滿流體的空間中，下方是一個固定不動的邊界，而距下邊界 L 處是一速度為 U 的平板。其 **No-Slip boundary condition(No-Slip B.C)**可寫為

$$y=L \quad , \quad u=U$$
$$y=0 \quad , \quad u=0$$



《圖 2-1》

對上板施力，使其做等速度運動；但因流體的黏滯力，使流體的速度呈線形分佈(Why？經 viscosity 作用，把動量由高處散布出去，參見普物實驗)，且滿足 Newton‘s law of viscosity

單位面積表面力　　$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$　　(2-5)

τ_{yx}：流體中每一點的切應力(shearing force)

y：受力面之法線方向；x：作用力的方向

$\frac{\partial u}{\partial y}$：應變率(rate of deformation)

μ　：動力黏滯係數(dynamic coefficient of viscosity)

將 2-5 式同除ρ，可得

$$\frac{\tau_{yx}}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

其中，υ 稱為**運動黏滯係數(kinematic viscosity)**

一般而言，μ不是一個固定的常數，它會隨著壓力、溫度等變數而改變；但若在給定的溫度(T)、壓力(P)之下，流體的μ =const，我們稱這種流體為**牛頓流體(Newtonian fluid)**。例如：水、空氣等。

Newtonian fluid：

There is a linear relation between the magnitude of applied shear stress and the resulting rate of deformation.

(變形率及所施加的切應力之間有一線性關係的流體)

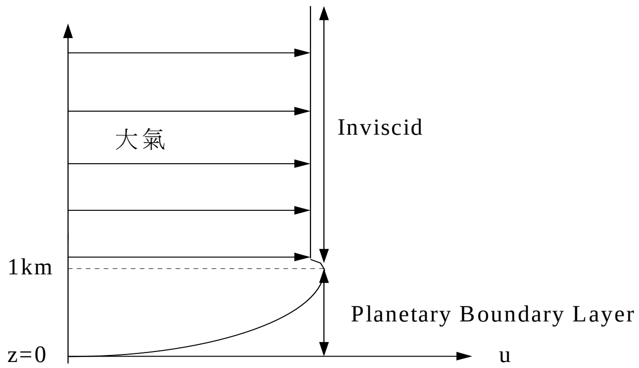
Ideal fluid：

(1) inviscid(non-viscous)
(2) incompressible

有許多流體的黏滯係數很小，而且在遠離固體邊界時，它們的運動通常可以看成是無黏滯性的理想流體；但若流經固體邊界表面附近時，流體所受到的摩擦效應則不能忽略；我們稱此為**邊界層理論(Boundary**

layer theorem，Chap 9)。

如下圖，大氣在距地表 1 ㎞內的運動，其摩擦效應並不能忽略，故形成了**一行星邊界層(Planetary boundary layer)**；而在 1 ㎞以上的大氣則可看成是無黏滯性的理想流體。



《圖 2-2》

§2.4　連續體假說(The Continuum Hypothesis)

我們在研究流體時通常有下列兩種觀點：**微觀(microscopic approach)**和**巨觀(macroscopic approach)**；前者是考慮每一個分子的特定運動，後者則是考慮許多分子的平均運動。

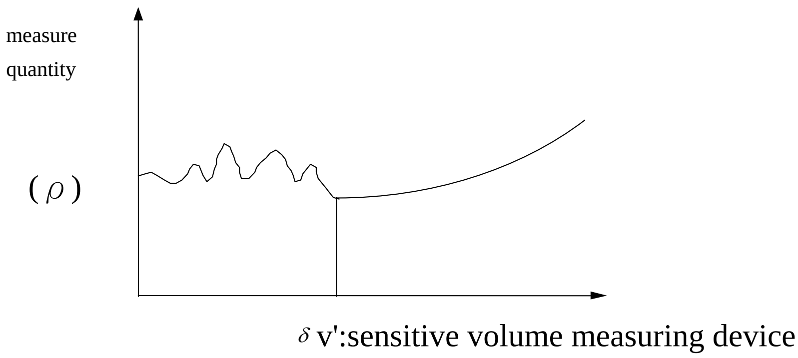
連續體假說(Continuum hypothesis)：

Assume fluid is compressed with homogeneous and uniform material.
(假設流體是均勻連續可壓縮的物質)

我們定義一參數$\mathbf{K_n}$**(knudson number)**

$$K_n \equiv \frac{\lambda}{L}$$

其中 λ ：mean free path，L：characteristic length scale，若 $K_n \ll 0.01$，稱此為**連續體(continuum)**。



《圖 2-3》

L 有以下的性質

$$\begin{cases} \text{small：>>mean free path} \\ \text{large：<<physical body} \end{cases}$$

一般來說，我們都將流體視為連續體。L 事實上就是我們觀察流體的尺度，而 physical body 便是我們觀察的對象。

此外，我們也定義d_o：diameter of molecule，r：distance between molecule，則gas：$r=10\ d_o$；liquid：$r=d_o$。所以**流體之尺度**可表示如下

gas：$L \gg 10\ d_o$

liquid：$L \gg d_o$

流體在其體積小於敏感體積時，其性質與體積間並無線性關係，直到達到敏感體積之後才有固定的關係；所以，我們把敏感體積當作是連續流體的最低極限，故密度可定義如下

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$$

§2.5　連續體的性質(properties of the continuum ~ velocity)

我們在描述流體時，如何利用流體之物理特性或物理量來表示整個流場的情況是十分重要的！我們就先以速度場為例。現在我們假想流場是由許多質點所組成的，而每個質點都隨著位置和時間的改變各自擁有不同的**瞬時速度(instantaneous velocity)**，我們可以表示成

$\bar{V} = \bar{V}(x, y, z, t)$。

但隨著每個流場不同的特性，我們也有一些特定的名詞來描述具有某種特定性質的流場。若我們所描述流場(如速度場)不隨時間的改變而發生變化，則稱之為**穩流(steady flow)**，表示成$\bar{V} = \bar{V}(x, y, z)$。另外還有一種特別的流場**均勻流(uniform flow)**，是指流體元素並不因為位置的不同而改變其大小、方向，只和時間的改變有關；狹義地說，是指流速的大小和方向沿流程都保持不變的穩流，我們可以表示成$\bar{V} = \bar{V}(t)$。

※ **小記：**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ )=0 \rightarrow steady$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}=\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}=\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}=0 \rightarrow uniform$$

$$\frac{d}{dt}(\ )=0 \rightarrow conserved$$

($\frac{dB}{dt}=0$ 表示跟著流體質點移動，其一變量 B 固定)

我們除了能夠用流體之動力學量(流體元素)來表示整個流場的情況外，將流場以圖形的方式表現出來也是十分重要的。所以下面我們將一些如何把流場以圖形表現出來的方法介紹一番。

(1) 氣流線(stream line)：

At any instant a family of line is traced through a moving fluid continuum in such a way as to be tangent to the velocity vector at every point in a fluid.

(流場中，在某已定時刻處與流動方向相切的線)

the equation of stream line：$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$

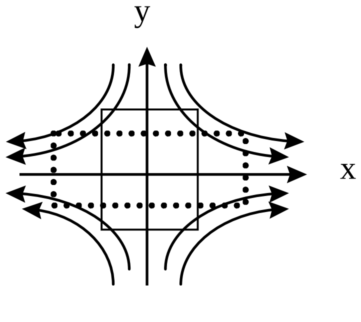
【e.g.】$\vec{v} = Ax\vec{i} - Ay\vec{j}$

$$\begin{cases} u = Ax \\ v = -Ay \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{-Ay}$$

$$\Rightarrow \ln x = -\ln y + c$$

$$\Rightarrow xy = c'$$

矩形因為氣流線被拉長，稱之為變形場。



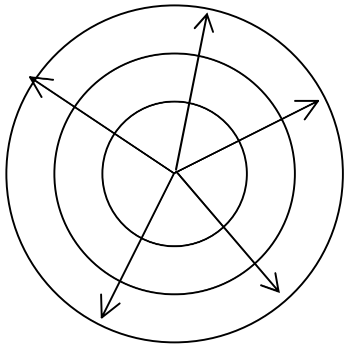
if A > 0

《圖 2-4》

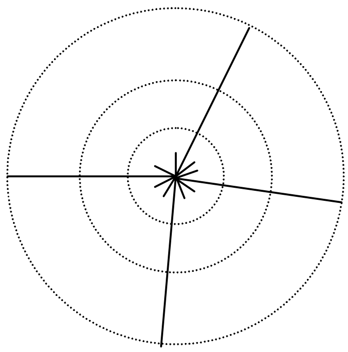
【e.g.】 $\vec{v} = Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3A$$

以二維來看



$\nabla \cdot \vec{v} > 0$
source



$\nabla \cdot \vec{v} < 0$
sink

(2) 軌跡線(Trajectory；path line)：

The path of a material element of fluid.

(物體在空間運動時所通過的軌跡曲線)

(3) 煙線(streak line)：

It is defined as the current location of all fluid particles that have passed through a fixed spatial point at some previous time . It determined by injecting dye or smoke at fixed point for an interval of time.

(在某已定時刻流體中確定的一條線，而該線上所有質點都成流經過某確定地點)

由於三種流線的定義並不相同，所以一般來說同一種流場應該有三種不同的流線。但在之前我們成經提過穩流這種不隨時間的改變而發生變化的流場，因為他不隨時間而變動的特性($\frac{\partial}{\partial t}=0$)，故會形成 Streak line= Trajectory = Stream line 的狀況。

§2.6 流體上的作用力(The force acting on the fluid)

我們在研究流體時，流體本身所受的力對流體有很大影響。所以在這一節中我們將對流體所受的力及其性質作所討論。我們在流體中取一個以封閉面 S 為界面的體積 V，則作用在流體上的力可以分為兩類，即**體積力(Body force)**與**表面力(Surface force)**。

體積力是指作用在流體每一體積元素(或實質元素)上之力，屬於 long range force，如重力、電磁力…等，都屬於此類

$$\vec{F}_B = \vec{F}\left(\vec{x},t\right)\cdot\rho\delta V \quad , \quad \vec{F}\left(\vec{x},t\right) = \vec{g}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}_B\right)_{resul\tan t} = \iiint_V \vec{F}\cdot\rho\delta V$$

表面力是指作用在流體任一表面上之力(與界面 S 接觸之流體或固

體作用於 S 上之力)，屬於 short range force，如壓力、摩擦力…等，都屬於此類

$$\vec{F}_s = \vec{\Sigma}\left(\vec{n}, \vec{x}, t\right)$$

$$\left(\vec{F}_s\right)_{\text{resultant}} = \iint_A \vec{\Sigma}\left(\vec{n}, \vec{x}, t\right)\delta A$$

受力面方向　　　位置向量

既然我們已經知道了作用在流體上的力主要分為體積力與表面力，那我們應該可以從這兩種力找出**慣性力(inertial force)**，我們利用 2nd law of Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \iiint \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV = \iiint \vec{F}\left(\vec{x}, t\right)\rho\delta V + \iint \vec{\Sigma}\left(\vec{n}, \vec{x}, t\right)\delta A$$

我們再回頭看表面力的問題，由於我們是在流體中取一個以封閉曲面 S 為界面的體積 V，而封閉曲面 S 的形狀並不固定，所以說計算表面力並不能光用一平面來估算。所以下面將討論描述表面力的方法。如圖 2-5 所示，考慮一個四面體，其所受的 Total surface force

$$\vec{\Sigma}\left(\vec{n}\right)\delta A + \vec{\Sigma}\left(-\vec{a}\right)\delta A_1 + \vec{\Sigma}\left(-\vec{b}\right)\delta A_2 + \vec{\Sigma}\left(-\vec{c}\right)\delta A_3$$

其中

$$\delta A_1 = \delta A\cos\theta_1 = \delta A(\vec{a}\cdot\vec{n})$$

$$\delta A_2 = \delta A\cos\theta_2 = \delta A(\vec{b}\cdot\vec{n})$$

$$\delta A_3 = \delta A\cos\theta_3 = \delta A(\vec{c}\cdot\vec{n})$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \delta V \frac{d\bar{V}}{dt}$$

$$=\left\{\delta A\left[\vec{\Sigma}(\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{n})\right]\right\}+(\vec{g}\cdot\rho\delta V) \tag{2-6}$$

$$\because \quad \delta\ell \rightarrow 0$$

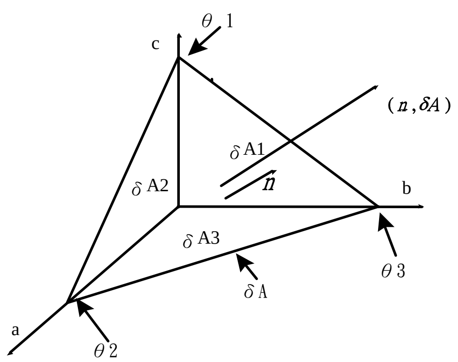
$$\Rightarrow \delta A \rightarrow \delta\ell^2 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \delta V \rightarrow \delta\ell^3 \rightarrow 0$$

$\therefore$2-6 式$\Rightarrow \delta A\left[\vec{\Sigma}(\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(-\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{n})\right]=0$

體積很小的時候，靜力平衡。

$$\Rightarrow \vec{\Sigma}(\vec{n})=\vec{\Sigma}(\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{n})+\vec{\Sigma}(\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{n})$$

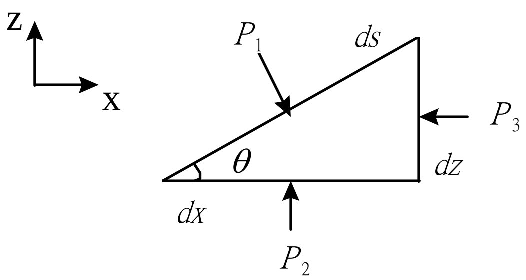


《圖 2-5》

§2.7 流體靜力(Fluid statics)

在靜止的流體中，任意選定一個極小的流體元素，如圖 2-6 所示；

討論其在 X、Z 方向上的受力情形可得



《圖 2-6》

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow P_1 ds \cdot \sin\theta - P_3 dz = 0$$

重力

$$\sum F_Z = 0 \quad \Rightarrow P_2 dx - P_1 ds \cdot \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g dz dx = 0$$

由於 $ds \cdot \cos\theta = dx$ ， $ds \cdot \sin\theta = dz$ ，且使 $dx \to 0$ ， $dz \to 0$ ，則得到

$$P_1 = P_2 = P_3$$ 各方向壓力相等

又因為θ角為任意選定，所以作用於一點的流體壓力在任意方向上皆應相等，此即為 Pascal’s law。

氣壓梯度力：

若靜止流體內，存在一矩形體積流體，如圖 2-7，其中心處所受的壓力為 P(x,y,z)。

$$Pa = P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(\frac{\delta x}{2}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\frac{\delta x}{2})^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(\frac{\delta x}{2})^3 + \cdots$$

$$Pb = P(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(\frac{\delta x}{2}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\frac{\delta x}{2})^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(\frac{\delta x}{2})^3 + \cdots$$

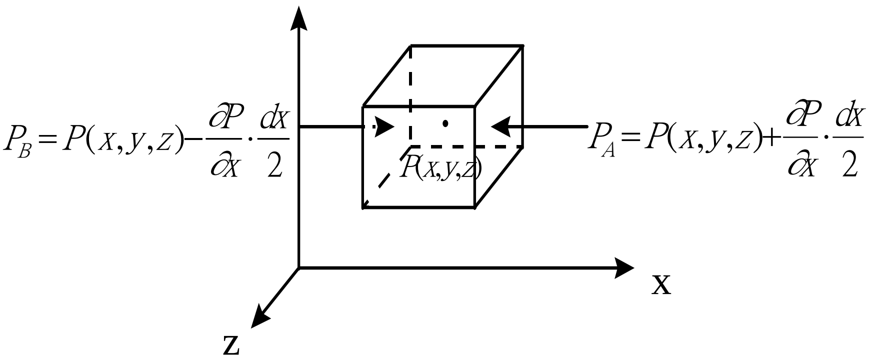
則 X 方向上各力的總和為

太小刪去

$$\delta F_{Px} = \left(P_B - P_A\right) \cdot dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dxdydz - \cancel{\frac{2}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\left(\frac{\delta x}{2}\right)^3} + \cdots$$

同理，Y 方向和 Z 方向上所受的總力分別為

$$\delta F_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot dxdydz \quad , \quad \delta F_{Pz} = -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot dxdydz$$



《圖 2-7》

因此，稱其所受的總力為氣壓梯度力(Pressure gradient force)

$$\begin{aligned}\delta \vec{F}_P &= \delta \vec{F}_{Px}\vec{i} + \delta \vec{F}_{Py}\vec{j} + \delta \vec{F}_{Pz}\vec{k} \\ &= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot dxdydz \\ &= -\vec{\nabla} P \cdot dxdydz\end{aligned}$$

而單位體積所受的氣壓梯度力

$$\frac{\delta \vec{F}_P}{dxdydz} = f_P = -\vec{\nabla} P$$

單位質量所受的氣壓梯度力(=加速度)

$$\frac{\delta \vec{F}_P}{\rho \cdot dxdydz} = \vec{F}_P = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P$$

因為 $\vec{\nabla} P$ 的方向是由低壓指向高壓，所以氣壓梯度力的方向便由高壓

指向低壓。

考慮一流體受到的總加速度

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-g\vec{k}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \tag{2-7}$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{v}}{dt}=-g\vec{k}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\vec{j}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\vec{j}+\left(-g-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{k}$$

若其呈靜力平衡(Hydrostatic balance)，則垂直加速度＝0

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g$$

且根據 Pascal’s law

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y}=0$$

由上述 2-7 式可以得到

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla P+\rho\vec{g}\quad \text{(Euler's eq.)}$$

如果考慮摩擦

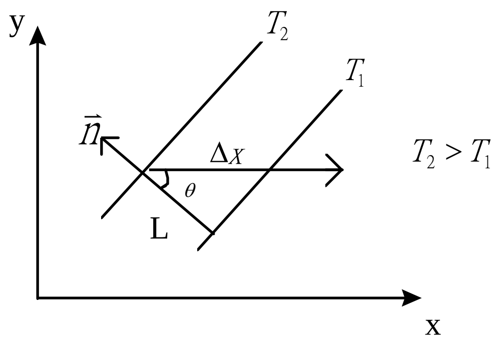
$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla P+\rho\vec{g}+\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{v})+\mu\nabla^2\vec{v}\quad \text{(Navier-Stokes eq.，Chap 5)}$$

對於不可壓縮的流體，其 $\nabla\cdot\vec{V}=0$，則

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{v}$$

※補充說明：▽的物理意義

$\vec{\nabla}$為指向物理量最大變化量的方向；如圖 2-8(T：溫度)



《圖 2-8》

$$\nabla T = \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)\hat{n}$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_2 - T_1}{-\Delta X}$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot \left(\frac{L}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot \cos\theta = \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{n} \cdot \vec{i} = (\nabla T) \cdot \vec{i}$$

即代表了溫度梯度在 X 軸方向之分量；同理，溫度梯度在 Y 軸與 Z 軸方向上之分量分別為

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (\nabla T) \cdot \vec{j} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial z} = (\nabla T) \cdot \vec{k}$$

至於其它有關基本向量的特性，請詳見附錄。