Chapter 0　Vector Analysis

§0-1 Vector algebra in 2-d space and 3-d space

向量 $\vec{a}$ 之長度以 $|\vec{a}|$ 表示，若 $|\vec{a}|=1$，則 $\vec{a}$ 稱為單位向量(unit vector)。

若向量 $\vec{a}=\vec{b}$，則 (1) $\vec{a}$ 之方向與 $\vec{b}$ 之方向相同且；
(2) $\vec{a}$ 之長度與 $\vec{b}$ 之長度相同

在 x , y , z 空間，若向量之起點 P : (x_1, y_1, z_1) 且終點在 Q : (x_2, y_2, z_2)，則向量之分量為

$$a_1 = x_2 - x_1$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

$$a_3 = z_2 - z_1$$

a_1 , a_2 , a_3 稱為 Components (分量)，即 $\vec{a}=[\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ]$

而 $|\vec{a}|$ 為向量之長度，$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

若 $\vec{a}=[\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ]$, $\vec{b}=[\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ]$

則 $\vec{a}+\vec{b}=[\ a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\ ,\ a_3+b_3\ ]$

Basic Properties:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

$c\vec{a}=[\ ca_1\ ,\ ca_2\ ,\ ca_3\ ]$

$c\ (\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$

$(c+k)\vec{a}=c\vec{a}+k\vec{a}$

$c\ (k\vec{a})=(ck)\vec{a}$

$1\vec{a}=\vec{a}$

$0\vec{a}=\vec{0}$

$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

若 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 為 x , y , z 方向之單位向量

$\vec{a}=[\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ]=\ a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

其中 $\hat{i}=[\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$，$\hat{j}=[\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ]$，$\hat{k}=[\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ]$

§ 0-2 Inner Product (Dot Product) 內積

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos\gamma$ ， γ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 向量之夾角

$=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$

若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為正交，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

若 $|\vec{a}|\ \geqq 0$, $|\vec{b}|\ \geqq\ 0$ 則 $\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}*\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}$

Properties:

$(q_1\vec{a}+q_2\vec{b})\cdot\vec{c}=q_1\vec{a}\cdot\vec{c}+q_2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|$

$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$

$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$\hat{i}\cdot\hat{i}=1$, $\hat{j}\cdot\hat{j}=1$, $\hat{k}\cdot\hat{k}=1$

$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$, $\hat{j}\cdot\hat{k}=0$, $\hat{k}\cdot\hat{i}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \cos\gamma$

$\Rightarrow\vec{a}$ 向量投影在 $\vec{b}$ 向量方向上的量為 $|\vec{a}|\ \cos\gamma$

Let $P=|\vec{a}|\ \cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

§ 0-3 Vector Product (cross product) 向量外積

$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\gamma$

$\vec{v}$ 垂直於 $\vec{a}$ ，且垂直於 $\vec{b}$ （右手旋轉定則）

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$$

Example: $\vec{a}$ =[4 , 0 , -1] , $\vec{b}$ =[-2 , 1 , 3]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - 10\hat{j} + 4\hat{k} = [\ 1\ ,\ -10\ ,\ 4\ ]$$

Example: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

General Properties of Vector Products:

$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (in general)

§ 0-4 Vector and Scalar Function and Fields, Derivatives

Vector Calculus 含兩種函數

1. Vector Function：其值為一個向量

$$\vec{V} = \vec{V}(p) = [v_1(p), v_2(p), v_3(p)]$$

p 為空間之一個點

2. Scalar Function：其值為一個純量

$$f = f(p)$$

Vector Function 表示空間某一區域之向量場，而

Scalar Function 表示空間某一區域或某一曲面上之值

若是在直角座標上時

$$\vec{V}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$$

Example 1:

若 $f(p)$ 表示空間點 p 到某一個點 p_0 之距離

則 $f(p) = f(x, y, z) = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Example 2:

速度 = 角速度×位置，即 $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

若 $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \omega \hat{k} \times [x, y, z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(-y\hat{i} + x\hat{j})$$

Vector Calculus

若向量 $\vec{V} = \vec{V}(t)$

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

若 $\vec{V}'(t)$ 存在，則 $\vec{V}'(t)$ 稱為 $\vec{V}(t)$ 之微分

$$\Rightarrow \vec{V}'(t) = [v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t)]$$

Properties:

$$(c\vec{V})' = c\vec{V}'$$

$$(\vec{U} + \vec{V})' = \vec{U}' + \vec{V}'$$

$$(\vec{U} \cdot \vec{V})' = \vec{U}' \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{V}'$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})' = \vec{U}' \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{V}'$$

Partial Derivatives of a Vector Function:

若 $\vec{V}=[v_1,v_2,v_3]=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$ ，

則 $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial x}=\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\hat{j}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x}\hat{k}$ ，

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}\hat{i}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}\hat{j}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial y}\hat{k}$$

§ 0-5 Curves, Tangents, Arc Length

空間之某一曲線 C 可表示為

1. $\vec{r}(t)=\left[x(t),y(t),z(t)\right]=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ …….參數式

2.以空間而言，$y=f(x)$，$z=g(x)$，其中 $y=f(x)$ 代表曲線投影在 xy 面上的函數圖形，而 $z=g(x)$ 代表曲線投影在 xz 面上的函數圖形。

3.第三種表示方法是利用兩個曲面的交接處。

若兩曲面 $F(x,y,z)=0$ ，及 $G(x,y,z)=0$

Example 1:　直線　（參數式法）

$\vec{r}(t)=\vec{a}+t\vec{b}=\left[(a_1+tb_1),(a_2+tb_2),(a_3+tb_3)\right]$ ，如

$\vec{r}(t)=[3,2,0]+t[1.1.0]=\left[(3+t),(2+t),0\right]$

Example 2:（圖，橢圓）

$\vec{r}(t)=[a\cos t,b\sin t,0]=a\cos t\ \hat{i}+b\sin t\ \hat{j}$ （參數式）

這個方程式表示橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，z = 0　（兩個函數）

§ 0-6 Review from Calculus

Chain Rule:

若 $w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

則 $$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

若 $w = f(x, y, z)$ ， $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ， $z = z(t)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Example 1.:若 $w = x^2 - y^2$ 且 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

則 $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= 2x\cos\theta - 2y\sin\theta = 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 2r\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) - 2y(r\cos\theta)$$

$$= -2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta = -2r^2\sin 2\theta$$

§ 0-7 Gradient of a Scalar Field, Directional Derivatives

Gradient (梯度)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$ 其中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$ 為一個算子

f 為一純量函數； ∇f 為一向量場

若　$f = 2x + yz - 3y^2$ ，

則　$\nabla f = 2\hat{i} + (z - 6y)\hat{j} + y\hat{k}$

gradient 是一個向量場，即有方向及大小；

向量場所指的方向有何特別的義意？

向量場與函數 f 在其他方向的微分有何關係？

Directional Derivative (方向導數)：$D_{\vec{b}} f$

$D_{\vec{b}} f$ 表示函數 f 在 P 點，沿 $\vec{b}$ 方向之微分

(directional derivative of f at P in the direction of $\vec{b}$)

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

其 $\vec{b}$ 為單位向量，Q 點為在 $\vec{b}$ 方向上之一點

$$\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k} = \vec{P}_0 + s\vec{b}$$

$s \geq 0$ ，$\left|\vec{b}\right| = 1$，$\vec{P}_0$ 為 P 點之位置向量；

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$（其中 $x' = \frac{dx}{ds}$ ，$y' = \frac{dy}{ds}$ ，$z' = \frac{dz}{ds}$ ）

再由　$\vec{r}(s) = \vec{P}_0 + s\vec{b} = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k}$

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{b} = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

$$\Rightarrow D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'\right) \cdot (x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}) = \nabla f \cdot \vec{b}$$

因此，$D_{\vec{b}} f$（ f 在 $\vec{b}$ 方向之方向導數）可解釋為 ∇f 與 $\vec{b}$（單位向量）之內積。另一個解釋為 ∇f 在 $\vec{b}$ 方向之投影，因此 f 在任

何非單位向量$\vec{a}$方向之方向導數可表示為　$D_{\vec{a}} f = \dfrac{df}{ds} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \cdot \nabla f$

Example 1 :

若　$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$，在點　$P(2,1,3)$　沿　$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{k}$ 方向導數為何？

1.　$\nabla f = 4x\hat{i} + 6y\hat{j} + 2z\hat{k}$，在點　P　之　$\nabla f = 8\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}$

2.　$D_{\vec{a}} f = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \cdot \nabla f$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}) = \frac{-4}{\sqrt{5}}$$

在此　$D_{\vec{a}} f = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} < 0$，表示 f 在點 P 沿著 $\vec{a}$ 方向為遞減。

• Gradient characterizes maximum increase. (最大增量的方向)

• Gradient 的長度及大小與座標軸之選定無關

$D_{\vec{b}} f = \vec{b} \cdot \nabla f = |\vec{b}|\,|\nabla f| \cos\gamma = |\nabla f| \cos\gamma$

因此當　$\cos\gamma = 1$　時，$D_{\vec{b}} f$ 有最大值，即　$\vec{b}$ 與　∇f 在相同方向

• Gradient as surface normal vector

若有一 surface　$f(x,y,z) = const$，

而面上每一點的位置向量為

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

對 $\vec{r}$ 取切線向量

$\Rightarrow \vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$　($\vec{r}'$ 切於此面)

再由　$f[x(t) + y(t) + z(t)] = c$ 對　t 微分

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

即 $\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0$

即 $(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}) \cdot (x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}) = 0$

即 $\nabla f \cdot \vec{r}\,' = 0$ (向量垂直) i.e. ∇f normal to surface.

Example 2:

若 $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 之面，在 $P(1,0,2)$ 之 normal vector 為何？

1. 由 $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 可得此平面為 $f(x,y,z) = 4(x^2 + y^2) - z^2$

$\Rightarrow \nabla f = 8x\hat{i} + 8y\hat{j} - 2z\hat{k}$ ，在 P 點 $\nabla f = 8\hat{i} - 4\hat{k}$

而 normal vector 為 $\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\hat{i} - \hat{k}}{\sqrt{5}}$

另外一個為 $-\hat{n} = -\frac{2\hat{i} - \hat{k}}{\sqrt{5}}$

Vector fields that are gradients of a scalar field ("potential") :

純量場有時候比向量場的處理較容易，由以上的例子可知 ∇f 是 f 面之 normal vector，若知道 ∇f，是否可以找到對應的 f 場呢？(即由 $f \to \nabla f$ ，but $\nabla f \underset{?}{\to} f$)

Note: $\nabla f \underset{?}{\to} f$ 的結論為不一定的，因 ∇f 須為一保守場才可求得。

對於某些向量場 $\vec{V}(P)$，若其性質是“保守”(conservative)的 (如重力場、電場……)，則我們可得一組 $f(P)$，使得 $\nabla f = \vec{V}(P)$，f 稱為**位函數(potential or potential function)**

* 何謂“保守”(conservative)？

即一點 P 在場中移動，當它回到原來位置時，其能量仍與原來相同。

Example :(Newton 重力場)

$$\vec{V} = -\frac{c}{r^3}\vec{r} = -c\left(\frac{x-x_0}{r^3}\hat{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\hat{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\hat{k}\right)$$

$$r = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(x-x_0)}{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{3/2}} = -\frac{x-x_0}{r^3}$$

同理，得 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y-y_0}{r^3}$ ，和 $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z-z_0}{r^3}$

則 $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{x-x_0}{r^3}\hat{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\hat{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\hat{k}\right)$

故 $\vec{V}$ 為 $f(x,y,z) = \frac{c}{r}$ 之向量場，f 為重力位函數（純量）

再進一步計算 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)$ ，$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)$ ，$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5}$$

$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$ ，三項相加之和為零

即 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f = 0$

一般表示為 $\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f = 0$

(∇^2 稱為 Laplace Operator)

Divergence (散度) of a vector field:

Divergence $\vec{V}$ ：$\nabla\cdot\vec{V}$ 為向量場之散度，它的值一個純量

$$\nabla\cdot\vec{V}=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k})$$

$$=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Example :

若 $\vec{V}=3xz\hat{i}+2xy\hat{j}-yz^2\hat{k}$ ，則 $\nabla\cdot\vec{V}=3z+2x-2yz$

f 梯度之散度為 $\nabla^2 f$

$$(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\nabla^2 f$$

Curl of a vector field ($\nabla \times \vec{V}$) 向量場旋度

$$\vec{V}(x,y,z) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Example:

$\vec{V} = yz\hat{i} + 3zx\hat{j} + z\hat{k}$ ，

$\nabla \times \vec{V} = -3x\hat{i} + y\hat{j} + 2z\hat{k}$

求 $\nabla \times (\nabla \cdot f) =$ ？

Example:

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

若 $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ ，$\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\hat{i} + \omega x\hat{j}$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\hat{k}$$

$\Rightarrow \nabla \times \vec{V} = 2\omega\hat{k}$